exercices : PRODUIT SCALAIRE avec solutions PROF : ATMANI NAJIB

2BAC série science expérimental filière : svt+pc

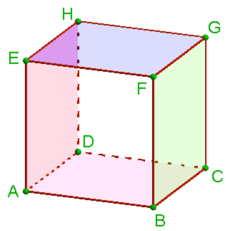
PRODUIT SCALAIRE de l'espace

Exercice1 : Soit ABCDEFGH un cube de côté a
Calculer les produits scalaires suivants :
$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{GC}$; $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DB}$

solution :1)calcul de $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{GC}$:on a : $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{EA}$ car ABCDEFG cube

$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AE}=-AE\times AE=-a^2$

(car E est le projeté orthogonales de F sur (AE)



2)calcul de $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CD}$:
Puisque ABCD est un carré
on a : $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$
donc : $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BA}=-AB\times AB=-a^2$
(car B est le projeté orthogonales de F sur (AB)

3)calcul de $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{DC}$: Puisque DCGH est un carré
on a : $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{DC}=0$ ($\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{DC}$)

4)calcul de $\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{GC}$:
$\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{HD}=0$ ($\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{EH}$)
donc : $\overrightarrow{EH}\perp\overrightarrow{GC}$

5)calcul de $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DB}$:
On a : $(AE)\perp(ABC)$ donc $(AE)\perp(DB)$ car $(DB)\subset(ABC)$ donc : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DB}=0$

Exercice2 : 1)Soit A , B et C des points de l'espace tel que $AB=\sqrt{5}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3$
Calculer $\left(-2\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{BC}$:

2) sachant que $\|\vec{u}\|=2$ et $\|\vec{v}\|=3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|=5$
Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$

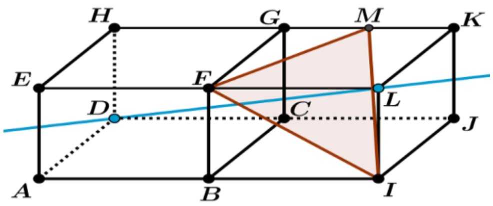
solution :1)
$\left(-2\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
$=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}^2-2\times3$
$=2AB^2-2\times3=2\times5-6=4$

2) On a : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(5^2-4-9^2\right)=6$

Exercice3 : Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à un plan dirigé par $\vec{u}(2,-1,3)$ et $\vec{v}(4,0,2)$.

solution : Ces deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires : une coordonnée est nulle pour l'un mais pas pour l'autre.
On note $\vec{n}(x,y,z)$.
Puisque $\vec{n}$est normal au plan dirigé par $\vec{u}$et $\vec{v}$alors $\vec{u}.\vec{n}=0$et $\vec{u}.\vec{n}=0$.
On obtient ainsi les deux équations
$2x-y+3z=0$et $4x+2z=0$
A l'aide de la deuxième équation, on obtient $z=-2x$. On remplace dans la première :
$2x-y-6x=0\Leftrightarrow -4x-y=0\Leftrightarrow y=-4x$.
On choisit, par exemple $x=1$et on trouve ainsi .
$\vec{v}(1;-4;-2)$
On vérifie : $\vec{u}.\vec{n}=2+4-6=0$✓et
$\vec{v}.\vec{n}=4+0-4=0$✓.
Un vecteur normal au plan dirigé par les vecteurs $\vec{u}$et $\vec{v}$est $\vec{n}(1;-4;-2)$

Exercice4 : Deux cubes d'arête 1, sont disposés comme indiqué sur la figure.
M est le milieu du segment [GK].
La droite (DL) est-elle perpendiculaire au plan (FMI)?



Solution : on se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$orthonormé

Voyons si $\overrightarrow{DL}$ est un vecteur normal au plan (FMI)
Il suffit de calculer: $\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{FI}$

On a : $\overrightarrow{DL}=-\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$ donc : $\overrightarrow{DL}(2;-1;1)$

On a : $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{FM}\left(\frac{1}{2};1;0\right)$

On a : $\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BI}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{FI}(1;0;-1)$

$\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{FM}=0$ et $\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{FI}=1\neq0$

Donc : (DL) n'est pas perpendiculaire au plan (FMI)

Exercice5: $ABCDEFGH$ un cube tel que : $AB=1$ avec I le milieu du segment $[EH]$ et J le milieu de $[EF]$

1)Montrer que $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EB}=0$ et que $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{ED}=0$

2) En déduire que le vecteur $\overrightarrow{EG}$ est normal au plan (BDE)

3) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont orthogonaux

4)l'espace étant rapporté au repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$

a) déterminer les coordonnées des points F ; C ; I et J

B)Montrer que $\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{CJ}=0$

et en déduire que $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont orthogonaux

Exercice6 : Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(4;2;-3)$ dont un vecteur normal est $\vec{n}(1;-2;-1)$

Solution : Une équation du plan $\mathscr{P}$ est de la forme $x-2y-z+d=0$

Le point A appartient au plan. Ses coordonnées vérifient donc l'équation :

$4-2\times 2-(-3)+d=0 \Leftrightarrow 3+d=0 \Leftrightarrow d=-3$

Une équation de $\mathscr{P}$ est donc $x-2y-z-3=0$

Exercice7 : $ABCDEFGH$ un cube tel que : $AB=1$ avec I le milieu du segment $[AE]$

On se place dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$

1) déterminer un vecteur normal au plan (CHI)

2) En déduire une équation cartésienne du plan (CHI)

Solution :1)soit un $\vec{n}(x;y;z)$ un vecteur normal au plan (CHI) donc $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{CH}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{CI}=0\end{cases}$

On a : $\overrightarrow{CH}(-1;0;1)$ et $\overrightarrow{CI}\left(-1;-1;\frac{1}{2}\right)$

Donc : $\begin{cases}-x+z=0\\ -x-y+\frac{1}{2}z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=x\\ -x-y+\frac{1}{2}x=0\end{cases}$

$\begin{cases}z=x\\ y=-\frac{1}{2}x\end{cases}$ Puisque on veut un seul vecteur normal

Alors on donne par exemple : $x=2$ on trouve

$\begin{cases}z=2\\ y=1\end{cases}$ donc un vecteur normal est $\vec{n}(2;-1;2)$

2)l'équation du plan s'écrit sous forme : $ax+by+cz+d=0$

Donc : $2x-y+2z+d=0$

Et puisque : $C(1;1;0)\in(CIH)$ donc :

$2-1+0+d=0 \Leftrightarrow d=-1$

Donc : (CIH): $2x-y+2z-1=0$

Exercice8 : On considère les plans d'équations :

$(P)\ 2x-4y+z+1=0$ et $(P')\ x+y+2z-3=0$

1)Monter que : $(P)\perp(P')$

2)Déterminer l'équation cartésienne du plan (Q) parallèle au plan (P) passant par le point $A(1;-1;1)$

Solutions :1)$\vec{n}(2;-4;1)$ et $\vec{n'}(1;1;2)$ les deux vecteurs normaux respectivement de (P) et $(P)'$

On a : $\vec{n}.\vec{n'}=2-4+2=0$

Donc $\vec{n}\perp\vec{n'}$ par suite : $(P)\perp(P')$

2) $(P)\parallel(Q)$ et $\vec{n}$ est normal a(P) donc est un vecteur normal a (Q)

Donc une équation cartésienne du plan (Q) est : $2x-4y+z+d=0$

Et puisque : $A(1;-1;1)\in(Q)$ donc :

$2+4+1+d=0 \Leftrightarrow d=-7$

Donc : (Q): $2x-4y+z-7=0$

Exercice9 :L'espace est muni d'un repère orthonormé$(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère le plan (P) d'équation $x+2y-z-1=0$

1)Les points A(1;1;2) et B(2;1;1) appartiennent-ils au plan (P)?

2)Calculer la distance AB puis les distances de ces deux points A et B au plan (P).

3)Le point A est-il le projeté orthogonal de B sur le plan (P)?

Solution : $1+2\times 1-2-1=0$ donc les coordonnées du point A vérifient l'équation de.

On en déduit que A appartient au plan (P)

et donc que :$2+2\times 1-1-1=2\neq 0$

donc les coordonnées du point B ne vérifient pas l'équation de (P) On en déduit que B n'est pas un point de (P).

2) $AB=\sqrt{(2-1)^2+1(2-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$

Calculons $d(A;(P))$ et $d(B;(P))$.

On a : $A\in(P)$ donc : $d(A;(P))=0$

$$d(B;(P))=\frac{|2+2\times1-1-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|2|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

on a : $\overrightarrow{AB}(1;0;-1)$

3)Un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n}(1;2;-1)$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $\overrightarrow{AB}$ n'est pas orthogonal au plan (P).

Le point A n'est donc pas le projeté orthogonal de B sur (P) .

Exercice10 :1)Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre Ω(1, −1,2) et de rayon $R=3$

2)Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre Ω(0, −3,0) et qui passe par A(2,1, −1).

Solution : 1) l'équation cartésienne de la sphère est : $(x-1)^2+(y-(-1))^2+(z-2)^2=3^2\Leftrightarrow$

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$

2) $S(\Omega,\ R)$ la sphère de centre Ω(1, −2,0) et qui passe par A(2,1, −1).

Donc : ΩA $=R$

$=\sqrt{(x_A-x_\Omega)^2+(y_A-y_\Omega)^2+(z_A-z_\Omega)^2}$

ΩA $=R=\sqrt{2^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{21}$

Donc l'équation cartésienne de la sphère est :

$(x-0)^2+(y-(-3))^2+(z-0)^2=\sqrt{21}^2\Leftrightarrow$

$x^2+(y+3)^2+z^2=21\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+6y-12=0$

Exercice11 : Déterminer une représentation paramétrique de la sphère de centre Ω(-1, 0,2) et de rayon $R=3$

Solution : Le système $\begin{cases} x=-1+3\sin\varphi\cos\theta \\ y=3\sin\varphi\sin\theta \\ z=2+3\cos\varphi \end{cases}$

$(\varphi;\theta)\in\mathbb{R}^2$ une représentation paramétrique de la sphère

Exercice12 :Déterminer (S) L'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}+2\sin\varphi\cos\theta \\ y=-1+2\sin\varphi\sin\theta \quad (\varphi;\theta)\in\mathbb{R}^2 \\ z=1+2\cos\varphi \end{cases}$$

Solution :soit $M(x;y;z)\in(S)$

Donc : $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-(-1))^2+(z-1)^2=$

$=(2\sin\varphi\cos\theta)^2+(2\sin\varphi\sin\theta)^2+(2\cos\varphi)^2$

$=4\sin\varphi^2(\cos\theta^2+\sin\theta^2)+4\cos\varphi^2$

Donc : $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-(-1))^2+(z-1)^2=2^2$

(S) L'ensemble des points $M(x;y;z)$ est donc la sphère de centre Ω(1 /2, -1,1) et de rayon $R=2$

Exercice13 : Déterminer (S) L'ensemble des points $M(x;y;z)$ dans les cas suivants :

1) (S_1) : $x^2+y^2+z^2-2x-6y-4z=0$

2) (S_2) : $x^2+y^2+z^2-6x+4y+6z+22=0$

3) (S_3) : $x^2+y^2+z^2-2x+3y+z+7=0$

Solution : 1)soit $a=1$ et $b=3$ et $c=2$ et $d=0$

$a^2+b^2+c^2-d=1+9+4=14$

Puisque $a^2+b^2+c^2-d=14\succ 0$

Donc : L'ensemble des points $M(x;y;z)$ est donc la sphère (S_1) de centre Ω(1, 3,2) et de rayon $R=\sqrt{14}$

2) (S_2) : $x^2+y^2+z^2-6x+4y+6z+22=0$

$M(x;y;z)\in(S_2)$

$\Leftrightarrow (x^2-6x)+(y^2+4y)+(z^2+6z)+22=0 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=0$

$\Leftrightarrow x-3=0$ et $y+2=0$ et $z+3=0$

$\Leftrightarrow x=3$ et $y=-2$ et $z=-3$

alors $S_2=\{\Omega(3;-2;-3)\}$

3) (S_3) : $x^2+y^2+z^2-2x+3y+z+7=0$

$M(x;y;z)\in(S_3)$

$\Leftrightarrow (x^2-2x)+(y^2+3y)+(z^2+z)+7=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{7}{2}$ alors $S_3=\varnothing$

Exercice14 : Soit : $A(-1;2;1)$ et $B(1;-1;0)$ deux points de l'espace

Déterminer l'ensemble (S) des points $M(x;y;z)$ de l'espace tel que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

Solution : $(x+1)(x-1)+(y-2)(y+1)+(z-1)z=0$

$\Leftrightarrow x^2-1+y^2-y-2+z^2-z=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-y-z-3=0$

$\Leftrightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$

Donc (S) est la sphère de centre $\Omega\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R=\sqrt{7/2}$

Exercice15 : Soient (S) une sphère :

$(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$

et (D) une droite : $\begin{cases} x=1-t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

Solution :

$$M(x;y;z)\in(S)\cap(D) \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R} / \begin{cases} x=1-t \\ y=1+t \\ z=1+t \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9 \end{cases}$$

Donc : $t^2+t^2+(t-1)^2=9 \Leftrightarrow 2t^2-2t-8=0$

$\Leftrightarrow t=2$ ou $t=\frac{-4}{3}$

$x=7/3; y=-1/3; z=-1/3$ ou $x=-1; y=3; z=3$

la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points $A\left(\frac{7}{3};\frac{-1}{3};\frac{-1}{3}\right)$ et $B(-1;3;3)$

Exercice16 : Soient (S) une sphère :

$x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z=0$

et (D) une droite : $\begin{cases} x=2+3t \\ y=4+t \\ z=-2+5t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

Solution :

$$M(x;y;z)\in(S)\cap(D) \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R} / \begin{cases} x=2+3t \\ y=4+t \\ z=-2+5t \\ x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z=0 \end{cases}$$

Donc :

$(2+3t)^2+(4+t)^2+(-2+5t)^2-2(2+3t)-4(4+t)+2(-2+5t)t-8=0$

$\Leftrightarrow 25t^2=0 \Leftrightarrow t=0$ Donc : $x=-2; y=4; z=-2$

la droite (D) coupe la sphère (S) en un seul point $A(2;4;-2)$ on dit que la droite (D) est tangente à (S) en $A(2;4;-2)$

Exercice17 : Soient (S) une sphère :

$x^2+y^2+z^2+2x-2y-1=0$

et (D) une droite : $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1+2t \\ z=2 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

Solution :

$$M(x;y;z)\in(S)\cap(D) \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R} / \begin{cases} x=-1+t \\ y=1+2t \\ z=2 \\ x^2+y^2+z^2+2x-2y-1=0 \end{cases}$$

Donc : $(-1+t)^2+(1+2t)^2+2^2+2(-1+t)-2(1+2t)-1=0$

$\Leftrightarrow 5t^2+1=0$ Pas de solutions

Donc la droite (D) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

Exercice18 : Soient (S) une sphère :

$x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0$

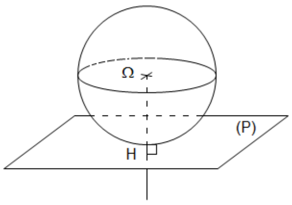
Et le plan d'équation $(P): 2x-y-z+5=0$

Étudier la position relative de la sphère (S) et le plan (P)

Solution : Déterminons le centre et le rayon de la sphère : On a : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0$ donc

$(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=\sqrt{6}^2$

(S) est donc une sphère de centre $\Omega(1;1;0)$ et de rayon $R=\sqrt{6}$



Et puisque : $d(\Omega;(P))=R=\sqrt{6}$

Alors le plan (P) et la sphère (S) ont un unique point en commun donc le plan (P) est tangent en H à (S)

Déterminons le point de tangence H qui est la projection de Ω sur le plan (P)

Soit $\vec{n}(2;-1;-1)$ Un vecteur normal à ce plan (P)

$$\exists k\in\mathbb{R} / \begin{cases} \overrightarrow{\Omega H}=k\vec{n} \\ H\in(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2k \\ y=1-k \\ z=-k \\ 2x-y-z+5=0 \end{cases}$$

Donc : $2(1+2k)-(1-k)-(-k)+5=0 \Leftrightarrow k=-1$ Donc :

$x=-1; y=2; z=1$ Donc $H(-1;2;1)$

Exercice19 : Soient (S) une sphère :

$x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$

Et le plan d'équation $(P): x-y+z-3=0$

Étudier la position relative de la sphère (S) et le plan (P)

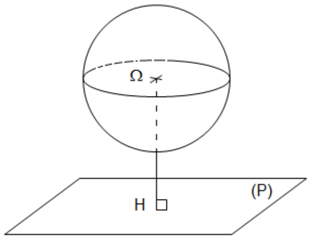
Solution : Déterminons le centre et le rayon de la sphère : On a : $x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ donc

$(S):(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=1^2$

(S) est donc une sphère de centre $\Omega(1;0;-1)$ et de rayon $R=1$

Et puisque : $d(\Omega;(P))=\dfrac{|1-0-1-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}\succ R$

Alors le plan (P) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.



$(S)\cap(P)=\varnothing$

Exercice20 : Soient (S) une sphère :

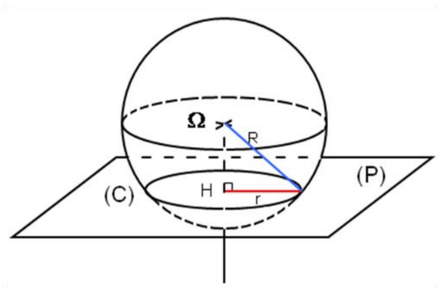
$(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$

Et le plan d'équation $(P): 2x-y+3z-2=0$

Étudier la position relative de la sphère (S) et le plan (P)

Solution : (S) est donc une sphère de centre $\Omega(2;1;-3)$ et de rayon $R=3$

Et puisque : $d(\Omega;(P))=\dfrac{|4-1-9-2|}{\sqrt{4+1+9}}=\dfrac{8}{\sqrt{14}}\prec R$



Alors la sphère (S) coupe le plan (P) suivant un cercle de centre H qui est la projection orthogonal du point Ω sur le plan (P) et de rayon

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\dfrac{62}{14}}$

Déterminons le centre $H(x;y;z)$ du cercle

Soit $\vec{n}(2;-1;3)$ Un vecteur normal à ce plan (P)

$\exists k \in \mathbb{R} / \begin{cases} \overrightarrow{\Omega H} = k\vec{n} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+2k \\ y = 1-k \\ z = -3+3k \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases}$

Donc : $2(2+2k)-(1-k)+3(-3+3k)-2=0$

$\Leftrightarrow k = \frac{4}{7}$ Donc : $x = \frac{22}{7}; y = \frac{3}{7}; z = -\frac{9}{7}$

Donc $H\left(22/7; 3/7; -9/7\right)$

Exercice21 : Soie (S) une sphère :

$(S): x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 3$

Et soit le point $A(1;-1;-1)$

Vérifier que $A \in (S)$ et Déterminer l'équations cartésienne du plan (P) tangent a la sphère (S) en A

Solution : $1^2 + (-1)^2 + (-1+2)^2 = 1+1+1 = 3$

donc $A \in (S)$

$\Omega(0;0;-2)$ est le centre de la sphère (S) et de rayon $R=3$ Et on a : $\overrightarrow{A\Omega}(-1;1;-1)$

Donc : $M(x;y;z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$

$\Leftrightarrow -(x-1)+(y+1)-(z+1)=0$

Donc l'équation de : $(P): x-y+z-1=0$

Exercice22 : on considère les plans d'équations respectives (P) $x-y+z=0$ et (Q) $2x+3y+z-6=0$

et la sphère (S) de centre $\Omega(1;2;4)$ et tangente au plan (P) et soit la droite (Δ) qui passant par Ω et perpendiculaire au plan (Q)

1) monter que les plans (P) et (Q) sont orthogonaux

2)a) déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S)

b)déterminer le point de tangence de (P) et (S)

3)a) déterminer le point d'intersection de (Δ) et (Q)

b) Montrer que le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant une cercle dont on déterminera le centre et le rayon

Solutions :1)On a : $\vec{n}(1;-1;1)$ Un vecteur normal à (P) et $\vec{n}'(2;3;1)$ Un vecteur normal à (P)

Et on a : $\vec{n}.\vec{n}' = 1\times 2 + (-1)\times 3 + 1\times 1 = 0$

Donc $\vec{n} \perp \vec{n}'$ donc (P) et (Q) sont orthogonaux

2)a)puisque la sphère (S) est tangente au plan (P) Alors : $d(\Omega;(P)) = R$

Et on a : $d(\Omega;(P)) = \frac{|1-2+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \sqrt{3}$

Donc : $R = \sqrt{3}$

Donc l'équation cartésienne de la sphère (S) est : $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 3$

2)b) le point de tangence H de (P) et (S) est la projection orthogonal Ω sur le plan (P) donc H est le point d'intersection entre la droite (D) perpendiculaires a (P) passant par Ω et on a : $\vec{n}(1;-1;1)$ Un vecteur normal à (P) donc c'est un vecteur directeur de la droite (D)

la représentation paramétrique de (D) est

$(D): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 4+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$H \in (D) \cap (P)$ Donc : $(1+t)-(2-t)+4+t=0$

$\Leftrightarrow t = -1$ donc : $H(0;3;3)$

3)a) puisque $(\Delta) \perp (Q)$ alors :

$\vec{n}(1;-1;1)$ Un vecteur directeur de (Δ)

Et on a : $\Omega \in (\Delta)$ donc la représentation paramétrique de (Δ) est $(\Delta): \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+3t \\ z = 4+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$W(x;y;z) \in (\Delta) \cap (Q)$

donc : $2(1+2t)+3(2+3t)+4+t-6=0$

$\Leftrightarrow t=-\frac{3}{7}$ donc : $W\left(\frac{1}{7};\frac{5}{7};\frac{18}{7}\right)$

3°b) Montrons que le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant une cercle dont on déterminera le centre et le rayon

on a : $d(\Omega;(Q))=\frac{|2+6+4-6|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{13}}\prec\sqrt{3}$

le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant une cercle de centre H qui est la projection orthogonal du point Ω sur le plan (Q)

et puisque (Δ) passe par Ω est perpendiculaires a (Q) en W alors $W\left(\frac{1}{7};\frac{5}{7};\frac{18}{7}\right)$ est le centre du cercle (C) et le rayon du cercle (C) est $r=\sqrt{R^2-d^2}$

avec $d=d(\Omega;(Q))$ Donc : $r=\sqrt{\frac{3}{13}}$

Exercice23: on considère l'ensemble (S_m) des points $M(x;y;z)$ de l'espace qui vérifient l'équations :

(S_m) : $mx^2+my^2+mz^2-2(m-1)x+2y+2z=0$

Avec m un paramètre non nul

1) monter que (S_m) est une sphère pour tout $m\in\mathbb{R}^*$

2) monter que tous les sphères se coupent suivant un seul cercle dont on déterminera le centre et le rayon

Solution : 1) $mx^2+my^2+mz^2-2(m-1)x+2y+2z=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2\left(\frac{m-1}{m}\right)x+\frac{2}{m}y+\frac{2}{m}z=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2\left(1-\frac{1}{m}\right)x+\frac{2}{m}y+\frac{2}{m}z=0$

$\Leftrightarrow\left(x-1+\frac{1}{m}\right)^2+\left(y+\frac{1}{m}\right)^2+\left(z+\frac{1}{m}\right)^2-\left(1-\frac{1}{m}\right)^2-\frac{2}{m^2}=0$

$\Leftrightarrow\left(x-1+\frac{1}{m}\right)^2+\left(y+\frac{1}{m}\right)^2+\left(z+\frac{1}{m}\right)^2=\left(1-\frac{1}{m}\right)^2+\frac{2}{m^2}$

Et puisque : $\left(1-\frac{1}{m}\right)^2+\frac{2}{m^2}\succ 0$

Alors : (S_m) est une sphère pour tout $m\in\mathbb{R}^*$ de centre $\Omega_m\left(1-\frac{1}{m};-\frac{1}{m};-\frac{1}{m}\right)$ et de rayon

$R_m=\sqrt{\left(1-\frac{1}{m}\right)^2+\frac{2}{m^2}}$

2)soit $M(x;y;z)\in(S_m)\quad\forall m\in\mathbb{R}^*$

Donc : $mx^2+my^2+mz^2-2(m-1)x+2y+2z=0\Leftrightarrow$

$m(x^2+y^2+z^2-2x)+(2x+2y+2z)=0:\forall m\in\mathbb{R}^*\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x=0\\2x+2y+2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+y^2+z^2=1\\2x+2y+2z=0\end{cases}$

Donc le cercle chercher et l'intersection entre : la sphère (S) : $(x-1)^2+y^2+z^2=1$ et le plan (P) : $2x+2y+2z=0$

en effet le cercle existe car :

$d(\Omega;(Q))=\frac{|1+0+0|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\prec 1$

le centre H du cercle est l'intersection entre (P) et la droite (Δ) qui passe par Ω est perpendiculaires a (P) et puisque $(\Delta)\perp(P)$ alors : $\vec{n}(1;1;1)$ Un vecteur directeur de (Δ) Et on a : $\Omega\in(\Delta)$ donc la représentation paramétrique de (Δ) est

$\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

$H(x;y;z)\in(\Delta)\cap(P)$

donc : $(1+t)+t+t=0$

$\Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}$ donc : $H\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

et le rayon du cercle (C) est :

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

Donc : tous les sphères se coupent suivant le cercle (C)

Exercice24 : dans l'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé On considère les plan (P_m) d'équations $x+y-z-m=0$ avec m paramètre réel Et la sphère (S) de centre $\Omega(1;2;1)$ et le rayon $R=\sqrt{3}$

1)Etudier et discuter suivant le paramètre m la position relative de la sphère (S) et les plan (P_m)

2)soit (E) l'ensemble des réels m tels que : (P_m) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C_m)

Déterminer l'ensemble des centres des cercles (C_m) lorsque m varie dans (E)

Solution : 1) (P_m) : $x+y-z-m=0$

$$d_m=d\left(\Omega;(P_m)\right)=\frac{|1+2-1-m|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|2-m|}{\sqrt{3}}$$

$\Leftrightarrow |2-m|\prec 3 \Leftrightarrow -3\prec 2-m\prec 3 \Leftrightarrow -5\prec -m\prec 1$

$\Leftrightarrow -1\prec m\prec 5$

le plan (P_m) coupe la sphère (S) suivant des cercles de centre C_m qui est la projection orthogonal du point Ω sur le plan (P_m)

soit (Δ) la doite qui passe par Ω est perpendiculaires a (P_m) et puisque $(\Delta)\perp(P_m)$ alors : $\vec{n}(1;1;-1)$ Un vecteur directeur de (Δ) Et on a : $\Omega\in(\Delta)$ donc la représentation paramétrique de (Δ) est $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=1-t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$

le centre C_m est le point d'intersection de (Δ) et (P_m)

on va donc résoudre le system $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=1-t\\x+y-z-m=0\end{cases}$

$1+t+2+t-(-t+1)-m=0 \Leftrightarrow 3t+2-m=0$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{m-2}{3}$ donc les coordonnées du centre du cercle d'intersection est $\begin{cases}x=1+\dfrac{m-2}{3}=\dfrac{m+1}{3}\\y=2+\dfrac{m-2}{3}=\dfrac{m+4}{3}\\z=1-\dfrac{m-2}{3}=\dfrac{-m+5}{3}\end{cases}$

$C_m\left(\dfrac{m+1}{3};\dfrac{m+4}{3};\dfrac{-m+5}{3}\right)$ et le rayon est :

et le rayon du cercle (C) est :

$r=\sqrt{R^2-{d_m}^2}$ avec $d_m=\dfrac{|2-m|}{\sqrt{3}}$ et $R=\sqrt{3}$

$$r_m=\sqrt{3-\left(\frac{|2-m|}{\sqrt{3}}\right)^2}\Leftrightarrow r_m=\sqrt{3-\left(\frac{|2-m|}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow r_m=\sqrt{\frac{9-(2-m)^2}{3}}=\sqrt{\frac{9-(m^2-4m+4)}{3}}=\sqrt{\frac{-m^2+4m+5}{3}}$$

2cas : Si $d\left(\Omega;(P_m)\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow \dfrac{|2-m|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow |2-m|=3 \Leftrightarrow 2-m=3$ ou $2-m=-3$

$\Leftrightarrow m=-1$ ou $m=5$

la sphère (S) de centre $\Omega(1;2;4)$ et tangente au plan (P_m)

si $m=-1$: le point de tangence T_1 est est le point d'intersection de (Δ) et (P_{-1})

on va donc résoudre le system $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=1-t\\x+y-z+1=0\end{cases}$

$1+t+2+t-(-t+1)+1=0 \Leftrightarrow 3t+2+1=0$

$\Leftrightarrow t=-1$ donc les coordonnées du point de tangence est $\begin{cases}x=0\\y=1\\z=2\end{cases}$ donc $T_1(0;1;2)$

si $m=5$: le point de tangence T_2 est est le point d'intersection de (Δ) et (P_5)

on va donc résoudre le system $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=1-t\\x+y-z-5=0\end{cases}$

$1+t+2+t-(-t+1)-5=0 \Leftrightarrow 3t+2-5=0$

$\Leftrightarrow t=1$ donc les coordonnées du point de tangence est $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases}$ donc $T_2(2;3;0)$

3cas : Si $d(\Omega;(P_m)) \succ \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|2-m|}{\sqrt{3}} \succ \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow |2-m| \succ 3 \Leftrightarrow 2-m \succ 3$ ou $2-m \prec -3$

$\Leftrightarrow m \prec -1$ ou $m \succ 5$

$(P_m) \cap (S) = \varnothing$

2) les coordonnées des centres des cercles d'intersections sont $\begin{cases} x=\frac{m+1}{3} \\ y=\frac{m+4}{3} \\ z=\frac{-m+5}{3} \end{cases}$ et $-1 \prec m \prec 5$

c'est une portion de droite

Exercice25 : dans l'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé on considère l'ensemble (S_m) des points $M(x;y;z)$ tq : (S_m) :

$x^2+y^2+z^2+mx+2(m-1)y+(m+4)z+1=0$

avec m paramètre réel

1)Montrer que (S_m) est une sphère $\forall m \in \mathbb{R}$

2)Déterminer l'ensemble des centres des (S_m) lorsque m varie dans $\mathbb{R}$

3)Montrer qu'il existe un cercle (C) incluse dans tous les sphères (S_m) $\forall m \in \mathbb{R}$ et Déterminer le plan (P) qui contient ce cercle (C)

4)Soit un point $M_0(x_0;y_0;z_0)$ dans l'espace tq $M_0 \notin (P)$

Montrer qu'il existe une sphère unique qui passe par M_0

5)Montrer qu'il existe deux sphères (S_m) tangentes au plan $(O;x;y)$

Solution : 1)

$x^2+y^2+z^2+mx+2(m-1)y+(m+4)z+1=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2\frac{m}{2}x+\left(\frac{m}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{2}\right)^2+2(m-1)y+(m-1)^2-(m-1)^2$

$+2\left(\frac{m+4}{2}\right)z+\left(\frac{m+4}{2}\right)^2-\left(\frac{m+4}{2}\right)^2+1=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{m}{2}\right)^2+(y+m-1)^2+\left(z+\frac{m+4}{2}\right)^2=\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{m+4}{2}\right)^2+(m-1)^2-1$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{m}{2}\right)^2+(y+m-1)^2+\left(z+\frac{m+4}{2}\right)^2=\frac{4(m-1)^2+(m+4)^2+m^2-4}{4}$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{m}{2}\right)^2+(y+m-1)^2+\left(z+\frac{m+4}{2}\right)^2=\frac{6m^2+16}{4}=R^2$

Et puisque : $\frac{6m^2+16}{4} \succ 0$

Alors : (S_m) est une sphère pour tout $m \in \mathbb{R}$ de centre $\Omega_m\left(-\frac{m}{2};1-m;-\frac{m+4}{2}\right)$ et de rayon

$R_m=\sqrt{\frac{6m^2+16}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{6m^2+16}$

2)Déterminons l'ensemble des centres des (S_m) lorsque m varie dans $\mathbb{R}$

les coordonnées des centres des cercles d'intersections sont $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}m \\ y=-m+1 \\ z=-\frac{1}{2}m-2 \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$

c'est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\left(-\frac{1}{2};-1;-\frac{1}{2}\right)$ et qui passe par $A(0;1;-2)$

3)Montrons qu'il existe un cercle (C) incluse dans tous les sphères (S_m) $\forall m \in \mathbb{R}$:

$x^2+y^2+z^2+mx+2(m-1)y+(m+4)z+1=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+mx+2my-2y+mz+4z+1=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2y+4z+1+m(x+2y+z)=0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (S): x^2+y^2+z^2-2y+4z+1=0 \\ (P): x+2y+z=0 \end{cases}$

Donc le cercle chercher et l'intersection entre : la sphère (S): $x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2^2$ et le plan (P) : $x+2y+z=0$

en effet le cercle existe car : $\Omega(0;1;-2)$

$d(\Omega;(P))=\frac{|0+2-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=0\prec 2$ donc $\Omega\in(P)$

donc le centre du cercle (C) est : $\Omega(0;1;-2)$

et le rayon est : $R=2$

et tous les sphères se coupent suivant le cercle (C)

et le plan (P) qui contient ce cercle (C) est :

$(P)\ : x+2y+z=0$

4) soit $M_0(x_0;y_0;z_0)$ dans l'espace tq $M_0\notin(P)$:

$x+2y+z=0$ donc $x_0+2y_0+z_0\neq 0$

Montrons qu'il existe une sphère unique qui passe par M_0 :c d a l'existence d'un unique m ?

$M_0\in(S)\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2+mx_0+2(m-1)y_0+(m+4)z_0+1=0$

$M_0\in(S)\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2+mx_0+2(m-1)y_0+(m+4)z_0+1=0$

$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2-2y_0+4z_0+1+m(x_0+2y_0+z_0)=0$

$\Leftrightarrow m(x_0+2y_0+z_0)=-(x_0^2+y_0^2+z_0^2-2y_0+4z_0+1)$

$\Leftrightarrow m=\frac{-(x_0^2+y_0^2+z_0^2-2y_0+4z_0+1)}{x_0+2y_0+z_0}$

6)Montrons qu'il existe deux sphères (S_m) tangentes au plan $(O;x;y)$:

L'équation du plan : $(O;x;y)$ est : $z=0$ donc

$d(\Omega_m;(O;x;y))=\frac{1}{2}\sqrt{6m^2+16}\Leftrightarrow\frac{\left|-\frac{m+4}{2}\right|}{\sqrt{1}}=\frac{1}{2}\sqrt{6m^2+16}$

$\Leftrightarrow |m+4|=\sqrt{6m^2+16}\Leftrightarrow(m+4)^2=6m^2+16$

$\Leftrightarrow m^2+8m+16=6m^2+16$

$\Leftrightarrow 5m^2-8m=0\ \ \Leftrightarrow m(5m-8)=0$

$\Leftrightarrow m=0$ ou $m=\frac{8}{5}$ donc il existe deux sphères (S_m) tangentes au plan $(O;x;y)$:

(S_0): $x^2+y^2+z^2-2y+4z+1=0$

$\left(S_{\frac{8}{5}}\right)$: $x^2+y^2+z^2+\frac{8}{5}x+2\left(\frac{8}{5}-1\right)y+\left(\frac{8}{5}+4\right)z+1=0$

Cad : $x^2+y^2+z^2+\frac{8}{5}x+\frac{6}{5}y+\frac{28}{5}z+1=0$

http:// abcmaths.e-monsite.com

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

Prof : Atmani najib