

**TD -FONCTIONS LOGARITHMIQUES**

**Exercice1** : déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1)  $f : x \rightarrow \ln(x+1)$     2)  $g : x \rightarrow \ln(x^2 - 3x + 2)$

3)  $h : x \rightarrow \frac{x}{\ln x}$     4)  $k : x \rightarrow \ln x + \ln(x-1)$

5)  $m : x \rightarrow \ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right)$

**Exercice2** : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

1)  $\ln(x-2) = 0$

2)  $\ln(3x-1) = \ln(5x-10)$     3)  $\ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0$

4)  $\ln(2x) = \ln(x^2 + 1)$     5)  $\ln(2x-6) \geq 0$

6)  $\ln(x-1) - \ln(3x+1) < 0$

**Exercice3** : On pose  $\ln(2) \approx 0,7$  et  $\ln(3) \approx 1,1$

Calculer:  $\ln(6)$  ;  $\ln(4)$  ;  $\ln(8)$  ;  $\ln(72)$

$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$  ;  $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$  ;  $\ln(\sqrt{2})$  ;  $\ln(\sqrt{6})$  ;  $\ln(3\sqrt{2})$

$\ln(12\sqrt[3]{3})$  ;  $A = \ln\sqrt{2+\sqrt{2}} + \ln\sqrt{2-\sqrt{2}}$  ;

$B = \frac{1}{4}\ln 81 + \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{27}$  et  $C = \ln(\sqrt{2}+1)^{2015} + \ln(\sqrt{2}-1)^{2019}$

**Exercice4** : On pose  $\alpha = \ln(a)$  et  $\beta = \ln(b)$

Calculer en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  les réels suivants :

$\ln(a^2b^5)$  et  $\frac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}$

**Exercice5** : simplifier et calculer :

$A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

$B = 2\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3}\ln(e^9)$

**Exercice6** : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

1)  $\ln(2x-1) = \frac{3}{2}$     2)  $2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$

3)  $3(\ln x)^2 + 2\ln x - 1 = 0$     4)  $\frac{\ln x + 3}{\ln x - 1} \geq -1$

5)  $\ln x + \ln(x-1) - \ln 2 = \ln 3$

6)  $\ln(2x+5) + \ln(x+1) \leq \ln 4$

7)  $\ln(14-x) > \ln(10+7x-3x^2)$

**Exercice7** : Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système

suivant : 
$$\begin{cases} 3\ln x + \ln y = 2 \\ 2\ln x - \ln y = 3 \end{cases}$$

**Exercice8** : déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1)  $f : x \rightarrow \frac{\ln(x+1)}{\ln(\ln x)}$     2)  $g : x \rightarrow \sqrt{1-\ln(e-x)}$

3)  $h : x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{(\ln(2x))^2 - 1}}$

**Exercice9** : Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x)+1}{\ln x}$     2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2(x) - \ln x)$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$     4)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x$

5)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$     6)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \log x$

7)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - x^3 \ln x$     8)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

9)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln(x))^2$  on pose :  $X = \sqrt{x}$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x)}{x-1} \quad 11) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (\ln x)^5$$

**Exercice10 :** Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln(3x^2 + 5)$$

**Exercice11 :** calculer la dérivée des fonctions définies par : 1)  $f(x) = x^2 - \ln x$  2)  $f(x) = x \ln x$

$$3) f(x) = \ln(1 + x^2)$$

**Exercice12 :** calculer la dérivée de la fonction définie sur  $I = ]-2; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3 + 8}}{(x^2 + 1)^3}$

**Exercice13 :** Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \ln|\ln|x||$$

$$2) f(x) = \ln|\sin^2 x + 3\sin x + 4|$$

**Exercice14 :** Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

$$1) I = \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2} \quad 2) I = ]0; 1[; g(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$3) I = ]-\infty; 1[; h(x) = \frac{1}{x-1} \quad 4) I = \left] \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right[; k(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$5) M(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \quad (\text{Essayer d'écrire}$$

$$g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ des réels à}$$

déterminer).

$$6) N(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x-3}$$

$$7) I = ]3; +\infty[; q(x) = \frac{1}{(x-2)\ln(x-2)}$$

**Exercice 15 :** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{par : } f(x) = \frac{5x+1}{x^2 + x - 2}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$  et Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$(\forall x \in D); f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

2) En déduire la fonction primitive de  $f$  sur  $]-\infty; -2[$  Tel que  $F(-3) = \ln 2$

**Exercice 16 :** simplifier et calculer :

$$1) \log_8 4 \quad 2) \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \quad 3) \log_{\sqrt{3}} 9$$

$$4) A = \log_2 \left( \frac{1}{5} \right) + \log_2 (10) + \log_{\frac{1}{3}} \left( \sqrt[5]{3} \right)$$

**Exercice17 :** On pose  $\alpha = \log_{40} (100)$  et

$$\beta = \log_{16} (25) \quad \text{Calculer } \beta \text{ en fonction } \alpha$$

**Exercice18 :** simplifier et calculer :

$$1) \log_{10} 100 \quad 2) \log_{10} 0,0001$$

$$3) A = \log(250000) + \log \sqrt{250} - \log(125)$$

**Exercice 19 :** déterminer le plus petit entier

$$\text{naturel } n \text{ tel que : } \left( \frac{3}{2} \right)^n \geq 10^{20}$$

**Exercice 20 :** 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$1) \log_3 (2x) \times (\log_5 (x) - 1) = 0$$

$$2) 2(\log x)^2 - 19 \log x - 10 = 0$$

$$3) \log_{\frac{1}{2}} \left( x - \frac{1}{2} \right) \geq 1$$

$$4) \log_{2x} (4x) + \log_{4x} (16x) = 4$$

Où  $\log$  est le logarithme décimal

**Exercice 21 :** 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations et équations suivantes :

$$1) \log_3 (7x-1)^2 = 0 \quad 2) \log_3 (5x+1) = 2$$

$$3) \frac{\log_3 (5x+1)}{\log_3 (7x-1)^2} \leq 1$$

**Exercice 22:** A) soit la fonction  $g$  définie

$$\text{par : } g(x) = x - \ln x$$

1) Déterminer  $D_g$  l'ensemble de définition de la fonction  $g$  et déterminer les limites aux bornes

de  $D_g$

2) Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $g$  puis dresser le tableau de variation de  $g$

3) en déduire que :  $\forall x > 0 \quad x > \ln x$

B) soit la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x}; \text{ si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

1) Montrer que  $D_f = [0; +\infty[$

2) Montrer que  $f$  est continue à droite de 0

3) calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4) Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite de 0

5) Montrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}$

6) Dresser le tableau de variation de  $f$

7) déterminer les points d'intersections de  $C_f$  et la

Droite :  $(\Delta): y = 1$

8) Montrer que :  $C_f$  coupe l'axe des abscisses

en un point d'abscisse dans  $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$

9) Construire la courbe  $C_f$  dans un repère

$(O; \vec{i}; \vec{j})$  ( $\ln 2 \approx 0,7$  ,  $e \approx 2,7$ )

**Exercice 23 :** Considérons les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]-1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

1) a) calculer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$$

b) montrer que :  $\forall x \in ]-1; +\infty[$  on a :

$$g(x) = (1+x) \left( \frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)} \right)$$

et en déduire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

c) Etudier les variations des fonctions  $f$  et  $g$  Puis dresser les tableaux de variations de  $f$  et  $g$

2) en déduire que  $\forall x \in ]0; +\infty[$  :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

3) calculer :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

4) montrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[$  :

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

**Exercice 24 :** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{par : } f(x) = x - 3 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$

2) montrer que le domaine d'étude de  $f$  est :

$$D_E = ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

3) Déterminer les limites aux bornes de  $D_E$

4) Etudier les variations de  $f$  sur  $D_E$

5) Etudier les branches infinies de  $(C_f)$

la courbe de  $f$

6) Construire la courbe  $(C_f)$  dans  $D_E$

**Exercice 25 :** 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\log_x(x+1) = \log_{x+1}(x)$$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :

$$\log_2(x) > \log_x(2)$$

**Exercice 26 :** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{par : } f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$

2) Résoudre l'équation  $f(x) = 1$

3) Résoudre l'inéquation  $f(x) \leq 1$

- 4) Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à gauche de  $e$
- 5) Etudier les variations de  $f$  et en déduire que  $f$  est une bijection de  $D_f$  vers un intervalle  $J$ .
- 6) Construire dans le même repère  $C_f$  et  $C_{f^{-1}}$

**Exercice 27** : Considérons la fonction  $g$  définie

$$\text{par : } g(x) = x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $g$
2. a) Montrer que la fonction  $g$  admet un prolongement par continuité en 0 noté  $g$
- b) Etudier la dérivabilité de  $g$  en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. Déterminer les limites de la fonction  $g$  en  $+\infty$  et en  $-1$  à gauche.
4. Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $g$  puis dresser le tableau de variation de  $g$
5. Etudier les branches infinies de la courbe  $C_g$ .
6. Construire la courbe  $C_g$

*« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.*

*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et  
exercices Que l'on devient un mathématicien*

