

# PRODUIT SCALAIRE de l'espace

**Exercice1 :** Soit ABCDEFGH un cube de côté a  
Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{GC} ; \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC} \text{ et } \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC} \text{ et } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB}$$

**Exercice2 :** 1) Soit A, B et C des points de l'espace tel que  $AB = \sqrt{5}$  et  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$

Calculer  $(-2\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC}$  :

2) sachant que  $\|\vec{u}\| = 2$  et  $\|\vec{v}\| = 3$  et  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$

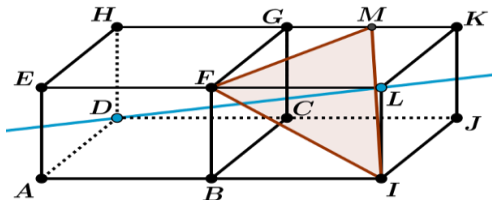
Calculer :  $\vec{u} \cdot \vec{v}$

**Exercice3 :** Déterminer les coordonnées d'un vecteur  $\vec{n}$  normal à un plan dirigé par  $\vec{u}(2, -1, 3)$  et  $\vec{v}(4, 0, 2)$ .

**Exercice4 :** Deux cubes d'arête 1, sont disposés comme indiqué sur la figure.

M est le milieu du segment [GK].

La droite (DL) est-elle perpendiculaire au plan (FMI)?



**Exercice5:** ABCDEFGH un cube tel que :  $AB = 1$  avec I le milieu du segment [EH] et J le milieu de [EF]

1) Montrer que  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$  et que  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$

2) En déduire que le vecteur  $\overrightarrow{EG}$  est normal au plan (BDE)

3) Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{FI}$  et  $\overrightarrow{CJ}$  sont orthogonaux

4) l'espace étant rapporté au repère  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

a) déterminer les coordonnées des points F ; C ; I et J

B) Montrer que  $\overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{CJ} = 0$

et en déduire que  $\overrightarrow{FI}$  et  $\overrightarrow{CJ}$  sont orthogonaux

**Exercice6 :** Déterminer une équation du plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A(4; 2; -3)$  dont un vecteur normal est  $\vec{n}(1; -2; -1)$

**Exercice7 :** ABCDEFGH un cube tel que :  $AB = 1$  avec I le milieu du segment [AE]

On se place dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

1) déterminer un vecteur normal au plan (CHI)

2) En déduire une équation cartésienne du plan (CHI)

**Exercice8 :** On considère les plans d'équations :

$$(P) 2x - 4y + z + 1 = 0 \text{ et } (P') x + y + 2z - 3 = 0$$

1) Montrer que :  $(P) \perp (P')$

2) Déterminer l'équation cartésienne du plan (Q)

parallèle au plan (P) passant par le point

$$A(1; -1; 1)$$

**Exercice9 :** L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère le plan (P)

d'équation  $x + 2y - z - 1 = 0$

1) Les points  $A(1; 1; 2)$  et  $B(2; 1; 1)$  appartiennent-ils au plan (P)?

2) Calculer la distance AB puis les distances de ces deux points A et B au plan (P).

3) Le point A est-il le projeté orthogonal de B sur le plan (P)?

**Exercice10 :** 1) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre  $\Omega(1, -1, 2)$  et de rayon  $R = 3$

2) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre  $\Omega(0, -3, 0)$  et qui passe par  $A(2, 1, -1)$ .

**Exercice11 :** Déterminer une représentation paramétrique de la sphère de centre  $\Omega(-1, 0, 2)$  et de rayon  $R = 3$

**Exercice12 :** Déterminer (S) L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2 \sin \varphi \cos \theta \\ y = -1 + 2 \sin \varphi \sin \theta \quad (\varphi; \theta) \in \mathbb{R}^2 \\ z = 1 + 2 \cos \varphi \end{cases}$$

**Exercice13** : Déterminer  $(S)$  L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  dans les cas suivants :

1)  $(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z = 0$

2)  $(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 6z + 22 = 0$

3)  $(S_3) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + z + 7 = 0$

**Exercice14** : Soit :  $A(-1; 2; 1)$  et  $B(1; -1; 0)$  deux points de l'espace

Déterminer l'ensemble  $(S)$  des points  $M(x; y; z)$

de l'espace tel que :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

**Exercice15** : Soient  $(S)$  une sphère :

$$(S) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

et  $(D)$  une droite : 
$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1+t \end{cases}$$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

**Exercice16** : Soient  $(S)$  une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z = 0$$

et  $(D)$  une droite : 
$$\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 4+t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2+5t \end{cases}$$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

**Exercice17** : Soient  $(S)$  une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 1 = 0$$

et  $(D)$  une droite : 
$$\begin{cases} x = -1+t \\ y = 1+2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 \end{cases}$$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

**Exercice18** : Soient  $(S)$  une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$$

Et le plan d'équation  $(P) : 2x - y - z + 5 = 0$

Étudier la position relative de la sphère  $(S)$  et le plan  $(P)$

**Exercice19** : Soient  $(S)$  une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$$

Et le plan d'équation  $(P) : x - y + z - 3 = 0$

Étudier la position relative de la sphère  $(S)$

et le plan  $(P)$

**Exercice20** : Soient  $(S)$  une sphère :

$$(S) : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$$

Et le plan d'équation  $(P) : 2x - y + 3z - 2 = 0$

Étudier la position relative de la sphère  $(S)$  et le plan  $(P)$

**Exercice21** : Soie  $(S)$  une sphère :

$$(S) : x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 3$$

Et soit le point  $A(1; -1; -1)$

Vérifier que  $A \in (S)$  et Déterminer l'équations cartésienne du plan  $(P)$  tangent a la sphère  $(S)$  en  $A$

**Exercice22** : on considère les plans d'équations respectives  $(P) x - y + z = 0$  et  $(Q)$

$$2x + 3y + z - 6 = 0$$

et la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega(1; 2; 4)$  et tangente au plan  $(P)$  et soit la droite  $(\Delta)$  qui passant par  $\Omega$  et perpendiculaire au plan  $(Q)$

1) montrer que les plans  $(P)$  et  $(Q)$  sont orthogonaux

2)a) déterminer l'équation cartésienne de la sphère  $(S)$

b) déterminer le point de tangence de  $(P)$  et  $(S)$

3)a) déterminer le point d'intersection de  $(\Delta)$  et  $(Q)$

b) Montrer que le plan  $(Q)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant une cercle dont on déterminera le centre et le rayon

**Exercice23:** on considère l'ensemble  $(S_m)$  des points  $M(x; y; z)$  de l'espace qui vérifient l'équations :

$$(S_m) : mx^2 + my^2 + mz^2 - 2(m-1)x + 2y + 2z = 0$$

Avec  $m$  un paramètre non nul

1) monter que  $(S_m)$  est une sphère pour tout  $m \in \mathbb{R}^*$

2) monter que tous les sphères se coupent suivant un seul cercle dont on déterminera le centre et le rayon

**Exercice24 :** dans l'espace  $(\mathcal{E})$  est muni d'un repère  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé On considère les plan  $(P_m)$  d'équations  $x + y - z - m = 0$  avec  $m$

paramètre réel Et la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega(1; 2; 1)$

et le rayon  $R = \sqrt{3}$

1) Etudier et discuter suivant le paramètre  $m$  la position relative de la sphère  $(S)$  et les plan  $(P_m)$

2) soit  $(E)$  l'ensemble des réels  $m$  tels que :  $(P_m)$

coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle  $(C_m)$

Déterminer l'ensemble des centres des cercles  $(C_m)$  lorsque  $m$  varie dans  $(E)$

**Exercice25 :** dans l'espace  $(\mathcal{E})$  est muni d'un repère  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé on considère

l'ensemble  $(S_m)$  des points  $M(x; y; z)$  tq :  $(S_m)$  :

$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + 2(m-1)y + (m+4)z + 1 = 0$$

avec  $m$  paramètre réel

1) Montrer que  $(S_m)$  est une sphère  $\forall m \in \mathbb{R}$

2) Déterminer l'ensemble des centres des  $(S_m)$  lorsque  $m$  varie dans  $\mathbb{R}$

3) Montrer qu'il existe un cercle  $(C)$  incluse dans tous les sphères  $(S_m) \forall m \in \mathbb{R}$  et Déterminer le plan  $(P)$  qui contient ce cercle  $(C)$

4) Soit un point  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  dans l'espace tq

$$M_0 \notin (P)$$

Montrer qu'il existe une sphère unique qui passe par  $M_0$

5) Montrer qu'il existe deux sphères  $(S_m)$  tangentes au plan  $(O; x; y)$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et  
exercices

Que l'on devient un mathématicien

**Prof : Atmani najib**

