Exercices : Étude de fonctions

Exercice 1:

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x + x - 1}{x + e^{-x}}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{(\ln x)^3}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{x^2} - e^{3x} + x^2\right)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((\ln x)^3 + x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}+e^x+x}{e^x - x}$
8. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(2x^2-1)}{x-1}$
9. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x-1} + x + 1$.

Exercice 2:

Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

1. $a(x) = \dfrac{x^2 + x\ln x}{x+1}$ en $+\infty$.
2. $b(x) = \dfrac{xe^x+1}{e^x+1}$ en $\pm\infty$
3. $c(x) = \dfrac{x\ln x + \ln x}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$.

Exercice 3:

Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\ln x}{x^2 - 2\ln x} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{x} & \text{si } x \in [-4;4] \setminus \{0\} \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 4:

Déterminer si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en x_0 (penser à bien déterminer le domaine de définition pour commencer) et le cas échéant, préciser la valeur en x_0 qui rend la fonction continue.

$a(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{2x+1}$ en $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ $\quad b(x) = \dfrac{x-1}{x^3 - x^2 - x + 1}$ en $x_0 = 1$ $\quad c(x) = \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$ en $x_0 = 2$.

Exercice 5:

Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0;1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 6:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2e^{-x}+1}$.
Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur une intervalle J à expliciter.

Exercice 7:

Montrer que l'équation $3 - 2x = e^x$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$. (On donne : $e \approx 2,718$ et $e^{1/2} \approx 1,648$.)

Exercice 8:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x + \ln x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur un intervalle que l'on précisera.
2. Justifier que l'équation $x + \ln x = 2005$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$ et que $1997 \leqslant \alpha \leqslant 1998$. (On donne : $\ln 1997 \approx \ln 1998 \approx 7,6$.)

Exercice 9:

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2e^{-x}}{1-e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   (Rappel : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$)

2. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x-1} & \text{si } x \in]0;+\infty[\setminus\{1\} \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Exercice 10:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x\ln(x^2) - 2x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0 et en donner une interprétation graphique.

Exercice 11:

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   b) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.
2. a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$.
   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   c) Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 12:

1. Soit a un réel et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-a\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{a+x}$.

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-a\}$ et $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(a+x)^{n+1}}$.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $g(x) = \dfrac{3x+2}{x^2-4}$.

   Montrer que l'on peut trouver deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ $g(x) = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2}$ et en déduire la dérivée n-ième de g pour tout entier n.

Exercice 13:

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition et expliciter leurs dérivées.

1. $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$
2. $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
3. $h(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{3}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 14:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = -x^2 + 3x - \ln x$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Étudier la convexité de f et déterminer les coordonnées du ou des points d'inflexion.
3. Déterminer les coordonnées du ou des points de la courbe représentative de f, $\mathcal{C}_f$ présentant une tangente horizontale.
4. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$. (On donne $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ et $\ln 2 \approx 0,7$)

Exercice 15:

Soit la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

1. Montrer que f est bijective. On note f^{-1} sa bijection réciproque. Préciser le domaine de définition de f^{-1}
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse $\dfrac{1}{3}$.
4. Quel est l'ensemble de dérivabilité de f^{-1}
5. La courbe représentative de f^{-1} admet-elle une tangente au point d'abscisse 1 ?
6. Dresser les tableaux de variation de f et f^{-1}.
7. Tracer sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et f^{-1}