

TD avec solutions : FONCTIONS PRIMITIVES

Exercice1 : Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$

par : $f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$

1) Déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur $]0; +\infty[$

2) Déterminer la fonction primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$ tel que : $F(1) = 3$

Solution : 1) $f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$

Donc : $F(x) = 2 \times \frac{1}{3} x^{2+1} + \frac{1}{2} x^{1+1} + 1x - \frac{1}{x^2} + k$

Donc : $F(x) = \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x - \frac{1}{x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

2) $F(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \times 1^3 + \frac{1}{2} \times 1^2 + 1 - \frac{1}{1} + k = 3$

$F(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 - 1 + k = 3 \Leftrightarrow \frac{7}{6} + k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{11}{6}$

Donc : la fonction primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$ tel que : $F(1) = 3$ est :

$F(x) = \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x - \frac{1}{x} + \frac{11}{6}$

Exercice2 : (situation directe): Déterminer une fonction primitive des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 5x^4 + 3x + 1$ 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x - 1$

3) $f(x) = \sin x + x \cos x$ 4) $f(x) = (2x-1)^3$

5) $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$ 6) $f(x) = 5x^3 \sqrt{3x^2+1}$

7) $f(x) = \frac{4x+1}{(2x^2+x)^4}$ 8) $f(x) = 7x \cos(\pi x^2 + 3)$

Solutions : 1) $f(x) = 5x^4 + 3x + 1$

$F(x) = 5 \times \frac{1}{5} x^5 + 3 \times \frac{1}{2} x^2 + 1x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x - 1$

$F(x) = 2\sqrt{x} + \sin x - \cos x - x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = \sin x + x \cos x = x' \sin x + x(\sin x)'$

Donc : $F(x) = x \times \sin x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

4) $f(x) = (2x-1)^3 = \frac{1}{2} (2x-1)' (2x-1)^3$

$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3+1} (2x-1)^{3+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

$F(x) = \frac{1}{8} (2x-1)^4 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

5) $f(x) = -\frac{x}{(x^2-1)^2}$

on doit remarquer que : $f(x) = -\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$

et par suite : $F(x) = \frac{1}{x^2-1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

6) $f(x) = 5x^3 \sqrt{3x^2+1}$ On doit remarquer que :

la fonction $u(x) = 3x^2 + 1$ donne $u'(x) = 6x$ et par

suite : $f(x) = \frac{5}{6} u'(x) \sqrt[3]{u(x)}$ on utilisant le tableau

on a :

(c'est de la forme : $u'^n \sqrt[n]{u}$ ($n = 3$))

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous

la forme : $F(x) = \frac{5}{6} \frac{3}{4} \sqrt[3]{u^4(x)} + k$

$F(x) = \frac{5}{8} \sqrt[3]{(3x^2+1)^4} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

7) Déterminons une fonction primitive de :

$$f(x) = \frac{4x+1}{(2x^2+x)^4} \quad \text{On doit remarquer que :}$$

la fonction $u(x) = 2x^2 + x$ donne $u'(x) = 4x+1$

$$\text{et par suite : } f(x) = \frac{u'(x)}{u^4(x)} = u'(x)u^{-4}(x)$$

on utilisant le tableau on a :

(c'est de la forme : $u'u^n$ ($n = -4$))

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous

$$\text{la forme : } F(x) = \frac{1}{-4+1} u^{-4+1}(x) + k$$

$$F(x) = -\frac{1}{3} (2x^2+x)^{-3} + k = -\frac{1}{3} \frac{1}{(2x^2+x)^3} + k$$

$$8) \quad f(x) = 7x \cos(\pi x^2 + 3)$$

On doit remarquer que :

la fonction $u(x) = \pi x^2 + 3$ donne $u'(x) = 2\pi x$

$$\text{et par suite : } f(x) = \frac{7}{2\pi} u'(x) \cos(u(x))$$

(c'est de la forme : $u' \times (v' \circ u)$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous

$$\text{la forme : } F(x) = \frac{7}{2\pi} \sin(\pi x^2 + 3) + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Exercice3 : Déterminer une fonction primitive des fonctions suivantes :

$$1) \quad f(x) = \frac{2}{x^2 + 2x + 4} \quad 2) \quad f(x) = \frac{6}{x^2 + x + 1}$$

$$\textbf{Solutions : } 1) \quad f(x) = \frac{2}{x^2 + 2x + 4}$$

il faut faire des transformations :

$$\text{A remarquer que } f(x) = \frac{2}{(x+1)^2 + 3}$$

Ce que nous laisse penser à la fonction $\arctan$

$$f(x) = \frac{2}{3 \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)'}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1}$$

$$(\text{C'est de la forme : } \frac{u'}{(u)^2 + 1})$$

Donc les fonctions primitives de la fonction f sont les fonctions

$$F(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{6}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{A remarquer que } f(x) = \frac{6}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$f(x) = \frac{6}{\frac{3}{4} \left(\frac{4}{3} \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + 1 \right)} = 8 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)'}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1}$$

$$(\text{C'est de la forme : } \frac{u'}{(u)^2 + 1})$$

Donc les fonctions primitives de la fonction f sont

$$\text{les fonctions : } F(x) = 4\sqrt{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + k \quad \text{avec}$$

$k \in \mathbb{R}$

Remarque : On peut utiliser cette méthode pour toutes les fonctions de la formes :

$$f(x) = \frac{\alpha}{ax^2 + bx + c} \quad \text{où le discriminant } \Delta \text{ est}$$

strictement négatif.

Exercice4 : Déterminer une fonction primitive des fonctions suivantes :

$$1) \quad f(x) = \frac{2}{4x^2 + 4x + 1} \quad 2) \quad f(x) = \frac{6}{x^2 + x + 1}$$

Solutions : 1) A remarquer que

$$f(x) = \frac{6}{(2x+1)^2} = (-3) \left(-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2} \right) \quad (\text{C'est de la forme: } -\frac{u'}{u^2})$$

Donc les fonctions primitives de la fonction f sont

les fonctions : $F(x) = \frac{-3}{2x+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Remarque : On peut utiliser cette méthode pour toutes les fonctions de la formes :

$$f(x) = \frac{\alpha}{ax^2 + bx + c} \quad \text{où le discriminant } \Delta \text{ est nul}$$

Exercice5 : Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x + 1 \text{ si } x \leq 1$$

$$f(x) = 2x - 1 \text{ si } x > 1$$

Montrer que la fonction f n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$

Solution : On remarque que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$; (elle n'est pas continue en 1)

en effet : $f(1) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \neq f(1)$

$F_1(x) = x^2 + x + k_1$ est une fonction primitive de la fonction f sur $] - \infty, 1]$.

$F_2(x) = x^2 - x + k_2$ est une fonction primitive de la fonction f sur $]1, +\infty[$.

Si f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ alors ils existent k_1 et k_2 tels que :

$$\begin{cases} F_1(x) = x^2 + x + k_1; \text{ si } \dots x \leq 1 \\ F_2(x) = x^2 - x + k_2; \text{ si } \dots x > 1 \end{cases}$$

et que F soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); F'(x) = f(x)$$

On a F est dérivable sur $] - \infty, 1[$

$$\text{et } (\forall x \in] - \infty, 1[)(F'(x) = f(x))$$

et F est dérivable sur $]1, +\infty[$

$$\text{et } (\forall x \in]1, +\infty[)(F'(x) = f(x))$$

Le problème il faut déterminer (s'ils existent)

k_1 et k_2 dans $\mathbb{R}$ pour que F soit dérivable en 1 et

$$\text{que : } F'(1) = f(1) = 3.$$

$$\text{On a } F(1) = 2 + k_1$$

D'autre part pour que f soit dérivable en 1, il faut qu'elle soit continue en 1, ce qui implique

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1)$$

On en déduit que $2 + k_1 = k_2$ d'autre part :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x + k_2 - 2 - k_1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x - 2 + k_2 - k_1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x - 2 + 2 + k_1 - k_1}{x - 1}$$

$$\text{Car : } 2 + k_1 = k_2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1 = F'_d(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + k_1 - 2 - k_1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 2 = 3 = F'_g(1)$$

Donc pour tous réels k_1 et k_2 ; $F'_d(1) \neq F'_g(1)$

D'où F n'existe pas et par suite f n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$

Exercice6 : Déterminer les fonctions primitives des fonctions :

$$1) f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 + 1}$$

$$2) f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{2 + \cos x}}$$

$$3) f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x \quad 4) f(x) = (4x + 5)^2$$

$$5) f(x) = 2\sqrt{2x+1} \quad 6) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$7) f(x) = x\sqrt{x^2+1} \quad 8) f(x) = \tan^2 x$$

$$9) f(x) = \cos^4 x \quad (\text{utiliser : } \cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2)$$

$$10) f(x) = \sin^3 x \quad (\text{Remarque que : } \sin^3 x = \sin x \sin^2 x)$$

Solutions : 1) il faut faire des transformations : a remarquer que :

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 + 4}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} + \frac{4}{x^2 + 1} = 1 + 4 \frac{1}{x^2 + 1}$$

Ce que nous laisse penser à la fonction $\arctan$

(C'est de la forme : $\frac{1}{x^2+1}$)

Donc les fonctions primitives de la fonction f sont les fonctions : $F(x) = x + 4 \arctan x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

$$2) f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{2+\cos x}} = -(2+\cos x)' (2+\cos x)^{-\frac{1}{3}}$$

(c'est de la forme : $u'u^n$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{-\frac{1}{3}+1} (2+\cos x)^{-\frac{1}{3}+1} + k = -\frac{3}{2} (2+\cos x)^{\frac{2}{3}} + k$$

$$F(x) = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{(2+\cos x)^2} + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

$$3) f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)'$$

Donc : $F(x) = x^2 \times \sin x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

$$4) f(x) = (4x+5)^2 = \frac{1}{4} (4x+5)' (4x+5)^2$$

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2+1} (4x+5)^{2+1} + k$$

$$F(x) = \frac{1}{12} (4x+5)^3 + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

$$5) f(x) = 2\sqrt{2x+1} = (2x+1)' (2x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Donc : } F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (2x+1)^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$F(x) = \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (\sqrt{2x+1})^3 + k$$

$$6) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$F(x) = \sqrt{x^2+1} + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

$$7) f(x) = x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2} (x^2+1)' (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x^2+1)^{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + k$$

$$F(x) = \frac{1}{3} (\sqrt{x^2+1})^3 + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

$$8) f(x) = \tan^2 x = (1+\tan^2 x) - 1$$

$$F(x) = \tan x - x + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

$$9) f(x) = \cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2$$

$$f(x) = \frac{1}{4} (1+2\cos 2x+\cos^2 2x) = \frac{1}{4} \left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2} \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{8} (3+4\cos 2x+\cos 4x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

$$F(x) = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

$$10) f(x) = \sin^3 x = \sin x \times \sin^2 x = \sin x \times (1-\cos^2 x)$$

$$f(x) = \sin x - \sin x \times \cos^2 x = \sin x + (\cos x)' \times \cos^2 x$$

$$F(x) = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Exercice7: Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$

$$\text{par : } f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

1) Déterminer les réels a et b tels que :

$$f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2} \quad \forall x \in [0; +\infty[$$

2) Déterminer la fonction primitive F de la fonction f sur $[0; +\infty[$ tel que : $F(1) = \frac{5}{2}$

Solution : 1)

$$f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)^2+b}{(x+1)^2} = \frac{ax^2+2ax+a+b}{(x+1)^2}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} a=1 \\ 2a=2 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=1 \\ b=-1 \end{cases} \text{ donc : } f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$2) f(x) = 1 - \frac{(x+1)'}{(x+1)^2} \text{ Donc : } F(x) = x + \frac{1}{x+1} + k$$

$$k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [0; +\infty[$$

Exercice8: Soit la fonction f définie sur $[1; +\infty[$

par : $f(x) = x\sqrt{x-1}$

1)montrer que : $f(x) = \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} \quad \forall x \in [1; +\infty[$

2)Déterminer la fonction primitive F de la fonction f sur $[1; +\infty[$ tel que : $F(2)=1$

Solution :1) $\forall x \in [1; +\infty[$

$$\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1)^2} \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = |x-1| \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}$$

On a : $x \in [1; +\infty[$ donc : $x \geq 1$ donc : $x-1 \geq 0$

donc :

$$\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} = (x-1) \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = x\sqrt{x-1} - 1\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = x\sqrt{x-1}$$

2) $f(x) = \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} \quad \forall x \in [1; +\infty[$

$$f(x) = \left((x-1)^3\right)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} = (x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = (x-1)'(x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Donc : } F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}+1}(x-1)^{\frac{3}{2}+1} + \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x-1)^{\frac{1}{2}+1} + k$$

$$F(x) = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + k$$

$$F(x) = \frac{2}{5}(\sqrt{x-1})^5 + \frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3 + k \quad k \in \mathbb{R}$$

Exercice9: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{5x^4 + 40x^2 + 20x + 80}{(x^2 + 4)^2}$$

1)Déterminer les réels a et b et c tels que :

$$f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+4)^2} + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2)Déterminer la fonctions primitives F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ tel que : $F(0) = c$

Solution :1)

$$f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+4)^2} + c = \frac{ax+b+c(x^2+4)^2}{(x^2+4)^2} = \frac{ax+b+cx^4+8cx^2+16c}{(x^2+4)^2}$$

$$f(x) = \frac{cx^4+8cx^2+ax+(b+16c)}{(x^2+4)^2} \text{ donc :}$$

$$\begin{cases} c = 5 \\ 8c = 40 \\ a = 20 \\ b + 16c = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5 \\ c = 5 \\ a = 20 \\ b = 0 \end{cases} \text{ donc : } f(x) = \frac{20x}{(x^2+4)^2} + 5$$

$$2) f(x) = \frac{20x}{(x^2+4)^2} + 5 \Leftrightarrow f(x) = 10 \frac{(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} + 5$$

$$\text{Donc : } F(x) = -\frac{10}{x^2+4} + 5x + k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$F(0) = 5 \Leftrightarrow -\frac{10}{4} + k = 5 \Leftrightarrow k = \frac{15}{2}$$

$$F(x) = -\frac{10}{x^2+4} + 5x + \frac{15}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

