

L'ARITHMETIQUE

Exercice1 : montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$;

$$1) (3n+1) \wedge (7n+2) = 1, 2) 5n+3 \wedge (2n+1) = 1$$

$$3) n+2 \wedge (n^2+2n-1) = 1$$

Solution : 1)

$$\text{on a : } 7(3n+1) - 3(7n+2) = 1$$

Donc : $\exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$u(3n+1) + v(7n+2) = 1 \quad u = 7 \text{ et } v = -3$$

Donc d'après le théorème de Bézout on a :

$$(3n+1) \wedge (7n+2) = 1$$

$$2) (5n+3) \wedge (2n+1) = 1$$

$$\text{Car : } 2 \times (5n+3) + (-5) \times (2n+1) = 1$$

$$3) (n+2) \wedge (n^2+2n-1) = 1$$

$$\text{Car } n \times (n+2) + (-1) \times (n^2+2n-1) = 1$$

Exercice2 : Montrons que : $360 \wedge 84 = 12$ et déterminer u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que :

$$360u + 84v = 12$$

Solution : on a : $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ et $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

$$\text{Donc } 360 \wedge 84 = 2^2 \cdot 3 = 12$$

$$\text{D'autre part : } 360 = 84 \times 4 + 24 \text{ donc :}$$

$$24 = a - (b \times 4)$$

$$\text{On a : } 84 = 24 \times 3 + 12$$

$$\text{Donc : } b - (a - (b \times 4)) \times 3 = 12$$

$$\text{On a : } 24 = 12 \times 2 + 0$$

$$\text{Donc : } -3a + 13b = 12$$

Exercice3 : Considérons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $17x + 36y = 1$ et déterminons une solution particulière de (E).

Solution : On a $17 \wedge 36 = 1$ donc d'après le théorème de Bézout ; il existe u et v tels que : $17u + 36v = 1$ donc (E) admet une solution.

On pose $a = 36$ et $b = 17$ on obtient :

$$a = 2b + 2 \quad \text{et} \quad b = 8 \times 2 + 1$$

$$\text{Donc : } 2 = a - 2b \text{ et } b = 8 \times (a - 2b) + 1$$

$$\text{D'où : } -8a + 17b = 1$$

Donc le couple $(-8, 17)$ est une solution de l'équation (E).

Exercice4 : résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : (E) $7(x-2) = 3(y+1)$

$$\text{Solution : } 7(x-2) = 3(y+1) \Leftrightarrow 7/3(y+1)$$

Or on sait que : $7 \wedge 3 = 1$

Donc d'après le théorème de Gauss : $7/y+1$

$$\text{Donc } \exists k \in \mathbb{Z} / y+1 = 7k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k-1$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-2) = 3(y+1) \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-2) = 3 \times 7k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 3k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k+2 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k-1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } S = \{(3k+2; 7k-1) / k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice5 : déterminer l'entier naturel n

$$\text{tel que : } \frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N}$$

$$\text{Solution : 1) 2) } \frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n(n^2+3n-2)}$$

$$\text{or on a : } 1 = (n+1) \wedge n \text{ car } (n+1) - n = 1 \text{ (bezout)}$$

$$\text{Donc : } \frac{n+1}{n^2+8n-2}$$

La division euclidienne de n^2+3n-2 par $n+1$

$$\text{Donne : } n^2+3n-2 = (n+1)(n+2) - 4$$

$$\frac{n+1}{n^2+3n-2} \text{ et } \frac{n+1}{n+1} \Rightarrow \frac{n+1}{n^2+3n-2} - (n+1)(n+2)$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{-4} \Rightarrow \frac{n+1}{4}$$

Il faut que $n+1 \in \{1; 2; 4\}$ ce qui entraîne :

$$n \in \{0; 1; 3\}$$

Inversement : On vérifie que 0 ; 1 ; 3 vérifient

$$\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N} \text{ Avant de conclure que :}$$

$$\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \in \{0; 1; 3\}$$

Exercice6: 1) Montrer que : $\forall a \in \mathbb{Z}^*$ et $\forall b \in \mathbb{Z}^*$

$$\text{on a : } a \wedge b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a \wedge (a+b) = 1 \\ b \wedge (a+b) = 1 \\ a \wedge b(a+b) = 1 \\ (a+b) \wedge ab = 1 \end{cases}$$

Solution: on pose $d = a \wedge (a+b)$

montrons que : $d = 1$

$$d = a \wedge b \Rightarrow \frac{d}{a} \text{ et } \frac{d}{a+b} \Rightarrow \frac{d}{a} \text{ et } \frac{d}{a+b-a}$$

$$\Rightarrow \Rightarrow d/a \text{ et } d/b \Rightarrow d/b \wedge a \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

ce qui entraîne: $1 = a \wedge (a+b)$ (1)

de même on montre que : $1 = b \wedge (a+b)$ (2)

de (1) et (2) en déduit que : $(a+b) \wedge ab = 1$

D'après une proposition

Et on a $a \wedge (a+b) = 1$ et $a \wedge b = 1$ donc

$a \wedge b(a+b) = 1$ D'après la même proposition

Exercice7 :

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(2n+5) \wedge (n^2+5n+6) = 1$$

Solution : on a : $n^2+5n+6 = (n+2)(n+3)$

Et on a : $(2n+5) - 2(n+2) = 1$

Donc d'après le théorème de Bézout

$$(n+2) \wedge (2n+5) = 1 \quad (1)$$

De même : on a : $2(n+3) - (2n+5) = 1$

Donc d'après le théorème de Bézout

$$(n+3) \wedge (2n+5) = 1 \quad (2)$$

de (1) et (2) en déduit que

$$(2n+5) \wedge ((n+3)(n+2)) = 1$$

Donc : $(2n+5) \wedge (n^2+5n+6) = 1$

Exercice8 : Considérons l'équation :

$$(E): 756x - 245y = 14$$

1- Montrer l'équation (E) admet une solution.

2- Déterminer une solution particulière de (E)

3- Résoudre l'équation (E)

Solution : $756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$ et $245 = 5 \times 7^2$

1) On a : $756 \wedge 245 = 7$ et $7|14$ donc l'équation (E) admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$

2- En utilisant l'algorithme d'Euclide on obtient :

$$a = 756 \text{ et } b = 245$$

$$a = 3 \times b + 21$$

$$b = 11 \times 21 + 14$$

$$21 = 14 + 7$$

$$\text{On a donc : } 21 = a - 3b$$

$$b = 11 \times (a - 3b) + 14 \Leftrightarrow 14 = 34b - 11a$$

$$7 = (a - 3b) - (34b - 11a) \Leftrightarrow 7 = 12a - 37b$$

Finalement : $14 = 24a - 74b$ et donc le couple $(24, 74)$ est une solution particulière de (E)

$$\text{D'où : } S = \left\{ \left(24 - \frac{245}{7}k; 74 - \frac{756}{7}k \right); k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$S = \left\{ (24 - 35k; 74 - 108k); k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$S = \left\{ (24 + 35k; 74 + 108k); k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice9 : déterminer dans $\mathbb{N}^2$ les couples

$$(x; y) / \begin{cases} x + y = 48 \\ x \wedge y = 4 \end{cases} \quad \text{avec } x \leq y$$

$$\text{Solution : } \begin{cases} x + y = 48 \\ x \wedge y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x'; y') \in \mathbb{N}^2 / \begin{cases} x = 4x' \\ y = 4y' \\ x + y = 48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (x'; y') \in \mathbb{N}^2 / 4x' + 4y' = 48$$

$$\Leftrightarrow \exists (x'; y') \in \mathbb{N}^2 / x' + y' = 12$$

On Dresse une table comme suit :

x'	0	1	2	3	4	5	6
y'	12	11	10	9	8	7	6
x	0	4	8	12	16	20	24
y	48	44	40	36	32	28	24

Donc :

$$S = \{(0; 48); (4; 44); (8; 40); (12; 36); (16; 32); (20; 28); (24; 24)\}$$

Exercice10: résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$\text{suivant: } \begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$$

Solution:

$$\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \equiv -4[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv -2[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$$

Car $2 \wedge 7 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 5[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ 3(5 + 7k) \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ k \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ k = 1 + 5k' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 5 + 7(1 + 5k'); k' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 35k' + 12; k' \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{35k' + 12; k' \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice11: montrer que l'ensemble des solutions du système suivant est non vide :

$$\begin{cases} n \equiv 2[11] \\ n \equiv 3[7] \end{cases}$$

$$\text{Solution : } \begin{cases} n \equiv 2[11] \\ n \equiv 3[7] \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / \begin{cases} n = 11x + 2 \\ n = 7y + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / 11x + 2 = 7y + 3$$

$$\Leftrightarrow \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / 11x - 7y = 1$$

Or on sait que : $7 \wedge 11 = 1$

Donc d'après le théorème de Bézout :

$$\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2 / 11u + 7v = 1$$

$$\text{Donc il suffit de prendre : } \begin{cases} x = u \\ y = -v \end{cases}$$

$$\text{Donc } \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / \begin{cases} n = 11x + 2 \\ n = 7y + 3 \end{cases}$$

Par suite : l'ensemble des solutions du système est non vide

Exercice12: résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante: (E) $5x - 3y = 1$

Solution : On a : $5 \times 2 - 3 \times 3 = 1$ donc (2;3) est une solution particulière de l'équation

Donc : $5x - 3y = 5 \times 2 - 3 \times 3$

Donc : $5(x - 2) = 3(y - 3) \Rightarrow 5/3(y - 3)$

Or on sait que : $5 \wedge 3 = 1$

Donc d'après le théorème de Gauss : $5/y - 3$

Donc $\exists k \in \mathbb{Z} / y - 3 = 5k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / y = 5k + 3$

(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} 5(x - 2) = 3(y - 3) \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 5k + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x - 2) = 3 \times 5k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 5k + 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 2 = 3k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 5k + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} x = 3k + 2 \\ y = 5k + 3 \end{cases}$

Donc $S = \{(3k + 2; 5k + 3) / k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice13 : Montrons que : $(\forall n \geq 2) : n^5 \equiv n[30]$

Solution : On a : d'après le petit théorème de Fermat : $n^5 \equiv n[5]$ Donc : $5/n^5 - n$

D'autre part : $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n((n^2)^2 - 1)$

$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$

Donc $2|n(n - 1)$ et $3|(n - 1)n(n + 1)$ et puisque 2 et 3 sont premiers alors $6 = (2 \times 3)$ divise $n^5 - n$

Finalement :

$\begin{cases} 5/n^5 - n \\ 6/n^5 - n \Rightarrow 30 = 6 \times 5/n^5 - n \\ 6 \wedge 5 = 1 \end{cases}$

Donc : $n^5 \equiv n[30]$

Exercice14 :

1) Montrer pour tout entier naturel n, non nul : $n^3 - n$ est divisible par 3.

2) Soit p un nombre premier différent de 2,

démontrer que $N = \sum_{k=0}^{p-2} 2^k$ est divisible par p .

Solution :

1. Le corollaire du théorème de Fermat affirme : Pour tout entier naturel a et tout nombre premier p , on a: $a^p \equiv a[p]$

Donc $a^p - a \equiv 0[p]$, c'est à dire $a^p - a$ est divisible par p .

$n \in \mathbb{N}^*$ et 3 est un nombre premier donc $n^3 - n$ est divisible par 3.

Remarques : on peut aussi justifier par une factorisation ou un raisonnement par récurrence.

2) $N = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{p-2}$

est la somme des (p-1) premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de

premier terme $2^0 = 1$

Donc: $N = \frac{1 - 2^{p-1}}{1 - 2} = 2^{p-1} - 1$

p est un nombre premier différent de 2 donc p est premier avec 2.

On utilise le théorème de Fermat: 2^{p-1} est divisible par p

Par suite : N est divisible par p.

Exercice15 : Le corollaire du théorème de Fermat affirme :

Pour tout entier naturel a et tout nombre Premier p, on a: $a^p \equiv a[p]$

La réciproque est-elle vraie ?

C'est à dire si pour tout entier naturel a , on a $a^p \equiv a[p]$ (avec p entier naturel supérieur ou égal à 2) alors a-t-on p premier ?

On se propose de donner un contre-exemple.

1. Décomposer 561 en produit de facteurs premiers.

2. Démontrer que si x est un entier alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x^n - 1)$ est un multiple de $(x - 1)$

3. Démontrer que $a^{561} - a$ est divisible par 3 puis par 11, puis par 17.

4. En déduire que pour tout entier naturel a : $a^{561} - a \equiv 0[561]$

Solution :

1) $561 = 3 \times 11 \times 17$

2) $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$

Si x est un entier alors :

$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1$ est un entier et $x - 1$ est un entier.

Conséquence : $(x^n - 1)$ est un multiple de $(x - 1)$

Remarque : on peut aussi effectuer un raisonnement par récurrence pour justifier le résultat)

3) $a^{561} - a = a(a^{560} - 1)$

On considère la décomposition de 560 en produit de facteurs premiers : $560 = 2^4 \times 5 \times 7$

560 a donc $5 \times 2 \times 2 = 20$ diviseurs de 560

$D_{560} = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 14; 16; 20; 28; 35; 40; 56; 70; 80; 140; 280; 560\}$

$560 = 2 \times 280$ donc : $a^{560} = (a^2)^{280}$

On pose $x = a^2$ et $n = 280$

$a^{560} - 1$ est un multiple de $a^2 - 1$. Donc il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que: $a^{560} - 1 = (a^2 - 1)K$

Par suite, $a^{561} - a = a(a^{560} - 1)$

$a^{561} - a = a(a^2 - 1)K$

$a^{561} - a = (a^3 - a)K$

Or $a^3 - a$ est divisible par 3

Donc, $a^{561} - a$ est divisible par 3

$a^{560} = (a^{10})^{56}$ On pose $x = a^{10}$ et $n = 56$

$a^{560}-1$ est un multiple de $a^{10}-1$.
 Donc il existe $K' \in \mathbb{N}$ tel que: $a^{560}-1=(a^{10}-1)K'$
 Par suite, $a^{561}-a=a(a^{560}-1)$
 $a^{561}-a=a(a^{10}-1)K'$
 $a^{561}-a=(a^{11}-a)K'$
 Or $a^{11}-a$ est divisible par 11
 Donc, $a^{561}-a$ est divisible par 11
 $a^{560}=(a^{16})^{35}$
 On pose $x=a^{16}$ et $n=35$
 $a^{560}-1$ est un multiple de $a^{16}-1$.
 Donc il existe $K'' \in \mathbb{N}$ tel que :
 $a^{560}-1=(a^{16}-1)K''$
 Par suite $a^{561}-a=a(a^{560}-1)$
 $a^{561}-a=a(a^{16}-1)K''$
 $a^{561}-a=(a^{17}-a)K''$
 Or $a^{17}-a$ est divisible par 17
 Donc, $a^{561}-a$ est divisible par 17
 4) 3; 11 et 17 sont trois nombres premiers donc
 premiers entre eux 2 à 2.
 $a^{561}-a$ est divisible par 3; 11 et 17.
 Donc $a^{561}-a$ est divisible par $3 \times 11 \times 17 = 561$
 Par suite: $a^{561}-a \equiv 0[561]$
 $a^{561} \equiv a[561]$ et pourtant 561 n'est pas un
 nombre premier.
 Donc la réciproque du corollaire du théorème de
 Fermat n'est pas vraie.

Exercice 16: soit p un nombre premier positif et

$$a \in \mathbb{N}^* \text{ et } p \wedge a = 1 \text{ on pose } F_p(a) = \frac{a^{p-1}-1}{p}$$

1) vérifier que : $F_p(a) \in \mathbb{N}$

2) soit $b \in \mathbb{N}^*$ tel que : $p \wedge b = 1$

Démontrer que : $F_p(ab) \equiv F_p(a) + F_p(b)[p]$

Solution :1) on a : $p \wedge a = 1$ et p un nombre
 premier donc : d'après le théorème de Fermat :

$$a^{p-1}-1 \equiv 0[p] \text{ donc : } \frac{a^{p-1}-1}{p} \equiv 0[1]$$

Donc : $F_p(a) \in \mathbb{N}$

2) d'après le théorème de Fermat :

$$a^{p-1}-1 \equiv 0[p] \text{ et } b^{p-1}-1 \equiv 0[p]$$

$$\text{Donc : } (a^{p-1}-1)(b^{p-1}-1) \equiv 0[p^2]$$

$$\text{Donc : } (ab)^{p-1} - a^{p-1} - b^{p-1} + 1 \equiv 0[p^2]$$

$$\text{Donc : } (ab)^{p-1} - 1 \equiv (a^{p-1}-1) + (b^{p-1}-1)[p^2]$$

$$\text{Donc : } \frac{(ab)^{p-1}-1}{p} \equiv \frac{a^{p-1}-1}{p} + \frac{b^{p-1}-1}{p}[p]$$

$$\text{Donc : } F_p(ab) \equiv F_p(a) + F_p(b)[p]$$

Exercice 17 : soit $n \in \mathbb{Z}$ on pose :

$$u_n = 5n^7 + 7n^5 + 23n$$

1) Démontrer que : $u_n \equiv 0[5]$

2) Démontrer que : $u_n \equiv 0[7]$

3) en déduire que : $\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$

Solution :1)

on a : 5 est un nombre premier donc : d'après le
 théorème de Fermat : $n^5 \equiv n[5]$

$$\text{et on a : } 5n^7 \equiv 0[5] \text{ et } 7n^5 \equiv 7n \equiv 2n[5]$$

$$\text{et } 23n \equiv 3n[5]$$

$$\text{donc : } u_n = 5n^7 + 7n^5 + 23n \equiv 0[5]$$

2) on a : 7 est un nombre premier donc : d'après
 le théorème de Fermat : $n^7 \equiv n[7]$

$$\text{et on a : } 5n^7 \equiv 5n[7] \text{ et } 7n^5 \equiv 0[7]$$

$$\text{et } 23n \equiv 2n[7] \text{ donc } u_n \equiv 7n[5]$$

$$\text{donc : } u_n \equiv 0[7]$$

3) on a : $5/u_n$ et $7/u_n$ et $5 \wedge 7 = 1$

$$\text{Donc : } 5 \times 7 / u_n \text{ cad } 35 / u_n$$

$$\text{Donc : } \frac{u_n}{35} \in \mathbb{Z} \text{ donc : } \frac{5n^7 + 7n^5 + 23n}{35} \in \mathbb{Z}$$

$$\text{donc : } \frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$$

Exercice 18 : Considérons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$(E): x^4 + 781 = 3y^4$$

1) montrer que : $\forall x \in \mathbb{Z} : x^4 \equiv 1[5] \text{ ou } x^4 \equiv 0[5]$

2) montrer que : $\forall x \in \mathbb{Z} : x^4 + 781 \equiv 2[5]$

$$\text{Ou } x^4 + 781 \equiv 1[5]$$

3) en déduire les solutions de l'équation (E)

Solution : 1) on a : 5 est un nombre premier
 donc : a) si 5 ne divise pas x alors : d'après le
 théorème de Fermat : $x^4 \equiv 1[5]$

b) si 5 divise x alors : d'après le théorème de
 Fermat : $x^4 \equiv 0[5]$

$$\text{donc : } \forall x \in \mathbb{Z} : x^4 \equiv 1[5] \text{ ou } x^4 \equiv 0[5]$$

2) on a : $\forall x \in \mathbb{Z} : x^4 \equiv 1[5] \text{ ou } x^4 \equiv 0[5]$

$$\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{Z} : x^4 + 781 \equiv 2[5] \text{ ou } x^4 + 781 \equiv 1[5]$$

3) on a : $\forall y \in \mathbb{Z} : y^4 \equiv 1[5] \text{ ou } y^4 \equiv 0[5]$

$$\text{Donc : } 3y^4 \equiv 0[5] \text{ ou } 3y^4 \equiv 3[5]$$

Mais on a :

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x^4 + 781 \equiv 1[5] \\ 3y^4 \equiv 0[5] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^4 + 781 \equiv 2[5] \\ 3y^4 \equiv 3[5] \end{cases}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{Z}$ et $\forall y \in \mathbb{Z}$ $x^4 + 781 \not\equiv 3y^4$

Donc : $S = \emptyset$

Exercice19 : soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante:

$$(E) : 36x - 25y = 5$$

1) montrer que si $(x; y)$ est une solution de

l'équation (E) alors x est un multiple de 5

2) déterminer une solution particulière de l'équation (E) et résoudre (E)

3) soit $(x; y)$ une solution de l'équation (E)

Et $x \wedge y = d$. Déterminer les valeurs possibles de d et Déterminer les solutions $(x; y)$ de (E) tel que $x \wedge y = 1$

Solution : 1) $(x; y) \in S \Leftrightarrow 36x - 25y = 5$

$$\Leftrightarrow 36x = 5(1 + 5y) \Rightarrow 5/36x$$

Or on sait que : $5 \wedge 36 = 1$

Donc d'après le théorème de Gauss : $5/x$

Donc x est un multiple de 5

Donc : $\exists x' \in \mathbb{Z} : x = 5x'$

2) déterminons une solution particulière de l'équation (E) ?

$$\text{On a : } 36x - 25y = 5 \Leftrightarrow 36 \times 5x' - 25y = 5$$

$$\Leftrightarrow 36x' - 5y = 1$$

On remarque que : $(1; 7)$ est une solution particulière de l'équation : $36x' - 5y = 1$

Donc : $(5; 7)$ est une solution particulière de l'équation (E)

$$(x; y) \in S \Leftrightarrow 36x - 25y = 5 \text{ et } 36 \times 5 - 25 \times 7 = 5$$

$$\Leftrightarrow 36(x - 5) = 25(y - 7)$$

On a donc : $36/25(y - 7)$ Et puisque : $25 \wedge 36 = 1$

Alors : $36/y - 7$ Donc :

$$\exists k \in \mathbb{Z} / y - 7 = 36k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / y = 36k + 7$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 36(x - 5) = 25(y - 7) \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 36k + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 5 = 25k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 36k + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} x = 25k + 5 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 36k + 7 \end{cases}$$

Inversement : $(25k + 5; 36k + 7)$ est solution de l'équation (E)

$$\text{Donc } S = \{(25k + 5; 36k + 7) / k \in \mathbb{Z}\}$$

3) soit $(x; y) \in S$ déterminons : $x \wedge y = d$

On a : $\exists k \in \mathbb{Z} / x = 25k + 5$ et $y = 36k + 7$

$$\text{Et on a : } \begin{cases} d/x \\ d/y \end{cases} \Rightarrow d/36x - 25y = 5$$

Donc : $d = 1$ ou $d = 5$

Si $d = 5$ alors $5/y = 7 + 36k$ car $5/x$

$$\text{Donc : } 7 + 36k \equiv 0[5] \text{ cad } 2 + k \equiv 0[5] \text{ cad } k \equiv 3[5]$$

$$\text{Si } d = 1 \text{ alors } k \equiv 4[5] \text{ ou } k \equiv 2[5] \text{ ou } k \equiv 1[5]$$

ou $k \equiv 0[5]$ donc :

$$k = 4 + 5\alpha \text{ ou } k = 2 + 5\alpha \text{ ou } k = 1 + 5\alpha \text{ ou } k = 5\alpha$$

Avec : $\alpha \in \mathbb{Z}$

Donc : $(x; y) \in S$ et $x \wedge y = 1$ ssi

$$(x; y) \in \{(125\alpha + 30; 180\alpha + 43); (125\alpha + 55; 180\alpha + 79); (125\alpha + 105; 180\alpha + 151); (125\alpha + 5; 180\alpha + 7); \alpha \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice20: on pose $A = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$

1) soit $a \in A$ discuter suivant a le nombre de solutions de l'équation : $(E) x^2 = a$ dans A

2) soient p et q deux éléments de A

On considère l'équation : $(F) x^2 - 2px + q = \bar{0}$

Montrer que l'équation : (E) admet une solution

ssi $p^2 - q$ appartient à un ensemble B à déterminer

3) application :

a) résoudre dans A l'équation : $x^4 + 3x^2 + 4 = \bar{0}$ (G)

b) déterminer les nombres entiers naturels b

Tels que : 11 divise $\overline{10304}_b$

Solution :1) On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

l'équation : (E) admet une solution unique dans A si $a = 0$

l'équation : (E) admet deux solution différentes dans A si $a \in \{\bar{1}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{9}\}$

l'équation : (E) n'admet pas de solution dans A si $a \in \{\bar{2}; \bar{6}; \bar{7}; \bar{8}; \bar{10}\}$

$$2) x \in A ; (F) x^2 - 2px = (x - p)^2 - p^2$$

$$x^2 - 2px + q = \bar{0} \Leftrightarrow (x - p)^2 = p^2 - q$$

l'équation : (F) admet une solution dans A ssi

$$p^2 - q \in \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{9}\} \text{ donc : } B = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{9}\}$$

3) a) résoudre dans A l'équation : $x^2 + \bar{3}x + \bar{4} = \bar{0}$ (G) ?

$$x^4 + \bar{3}x^2 + \bar{4} = \bar{0} \Leftrightarrow X^2 + \bar{3}X + \bar{4} = \bar{0} \text{ avec : } X = x^2$$

$$\Leftrightarrow X^2 - \bar{8}X + \bar{16} = \bar{0} \text{ car } \bar{4} = \bar{15} \text{ et } \bar{3} = \bar{-8}$$

$$\Leftrightarrow (X - \bar{4})^2 = \bar{1} \Leftrightarrow X - \bar{4} = \bar{1} \text{ ou } X - \bar{4} = \bar{10}$$

$$(G) \Leftrightarrow X = \bar{5} \text{ ou } X = \bar{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \bar{5} \text{ ou } x^2 = \bar{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \bar{4} \text{ ou } x = \bar{7} \text{ ou } x = \bar{5} \text{ ou } x = \bar{6}$$

Donc : l'ensemble des solutions de (G) est :

$$S = \{\bar{4}; \bar{5}; \bar{6}; \bar{7}\}$$

3) b) déterminons les nombres entiers naturels b

Tels que : 11 divise $\overline{10304}_{(b)}$?

$$\text{On a : } \overline{10304}_{(b)} = b^4 + 3b^2 + 4$$

$$\begin{array}{r} 11 \overline{) 10304} \\ \underline{11} \\ 1304 \\ \underline{11} \\ 2040 \\ \underline{22} \\ 240 \\ \underline{22} \\ 20 \\ \underline{22} \\ 204 \\ \underline{22} \\ 24 \\ \underline{22} \\ 2 \end{array} \Leftrightarrow b^4 + 3b^2 + 4 \equiv 0[11]$$

$$\Leftrightarrow \bar{b}^4 + 3\bar{b}^2 + \bar{4} = \bar{0} \text{ dans } A$$

$$\Leftrightarrow \bar{b} \in \{\bar{4}; \bar{5}; \bar{6}; \bar{7}\}$$

$$\Leftrightarrow \bar{b} \in \bar{4} \cup \bar{5} \cup \bar{6} \cup \bar{7} \Leftrightarrow b = 11k + r \text{ et } r \in \{4; 5; 6; 7\}$$

Et $k \in \mathbb{N}$

Exercice21: On suppose qu'il existe des entiers naturels non nuls m , n et a tels que:

$$(4m + 3)(4n + 3) = 4a^2 + 1$$

1) Soit p un nombre premier quelconque divisant $4m + 3$.

Montrer que p est impair et que :

$$(2a)^p - 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} [p]$$

2) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $p \equiv 1[4]$

3. En utilisant la décomposition de $4m + 3$ en facteurs premiers obtenir une contradiction

Solution :

$$1) 4m \equiv 0[2] \text{ donc } 4m + 3 \equiv 3[2] \text{ donc}$$

$$4m + 3 \equiv 1[2]$$

$4m + 3$ n'est pas divisible par 2 donc $p \neq 2$ et donc p est impair.

p est impair donc $p = 2q + 1$ avec $q \in \mathbb{N}$

p est un diviseur de $4m + 3$

$$4m + 3 \text{ est un diviseur de } 4a^2 + 1$$

Donc p est un diviseur de $4a^2 + 1$

$$\text{Par suite : } 4a^2 + 1 \equiv 0[p] \text{ donc } 4a^2 \equiv -1[p]$$

$$\text{donc } (2a)^2 \equiv -1[p] \text{ donc } (2a)^{2q} \equiv (-1)^q [p]$$

$$\text{Or, } 2q \equiv p - 1 \text{ donc } q \equiv \frac{p-1}{2}$$

$$\text{On a donc : } (2a)^p - 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} [p]$$

2) Pour pouvoir utiliser le théorème de Fermat, on doit vérifier que p et $2a$ sont premiers entre eux.

p étant un nombre premier il suffit de vérifier que p n'est pas un diviseur de $2a$.

On suppose que $2a \equiv 0[p]$

$$\text{On a alors } 4a^2 \equiv 0[p] \text{ et donc } 4a^2 + 1 \equiv 1[p]$$

Or, on a vu dans la question précédente que :

$$4a^2 + 1 \equiv 0[p]$$

Donc p n'est pas un diviseur de $2a$ et p et $2a$ sont premiers entre eux

D'après le théorème de Fermat :

$$(2a)^{p-1} \equiv 1[p]$$

Or d'après la première question :

$$(2a)^p - 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} [p]$$

$$\text{On a donc : } (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$$

Cela signifie que $\frac{p-1}{2}$ est un nombre pair.

Or $q \equiv \frac{p-1}{2}$ Donc q est un nombre pair.

Il existe $q' \in \mathbb{N}$ tel que $q = 2q'$

$$p = 2q + 1$$

$$p = 4q' + 1$$

$$\text{et donc : } p \equiv 1[4]$$

$$3) 4m + 3 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m} \equiv 1[p]$$

$p_1 ; p_2 ; \dots ; p_m$ sont des nombres premiers distincts. et $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \dots ; \alpha_m$ sont des entiers naturels non nuls.

$p_1 ; p_2 ; \dots ; p_m$ sont des nombres premiers qui divisent $4m + 3$

D'après la question précédente :

$$p_1 \equiv 1[4] \text{ et } p_2 \equiv 1[4] \text{ et } \dots \text{ et } p_m \equiv 1[4]$$

$$\text{Donc : } p_1^{\alpha_1} \equiv 1[4] ; p_2^{\alpha_2} \equiv 1[4] \dots p_m^{\alpha_m} \equiv 1[4]$$

$$\text{Par suite : } p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m} \equiv 1[4]$$

$$4m + 3 \equiv 1[4]$$

$$\text{Or, } 4m \equiv 0[4] \text{ donc : } 4m + 3 \equiv 3[4]$$

Il y a contradiction, il n'existe pas des entiers naturels non nuls m , n et a tels que:

$$(4m + 3)(4n + 3) = 4a^2 + 1$$

Exercice22 : Démontrer que pour tout entier naturel non nul n on a $N = n^{13} - n$ est divisible par 13; 7; 5; 3 et 2.

Solution : 13 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat :

$n^{13}-n$ est divisible par 13.

$$n^{13}-n=n(n^{12}-1)$$

$12=2^2 \times 3$ donc : Le nombre 12 à 6 diviseurs

$$D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

$$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n(n^6-1)(n^6+1)=(n^7-n)(n^6+1)$$

7 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat :

$$n^7-n \text{ est divisible par } 7.$$

Par suite, $n^{13}-n$ est divisible par 7.

$$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^4)^3-1]$$

On utilise le résultat de l'exercice précédent :

$$n[(n^4)^3-1] \text{ est un multiple de } n^4-1$$

$$\text{Donc il existe } K \in \mathbb{N} \text{ tel que : } (n^4)^3-1=(n^4-1)K$$

$$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^4)^3-1]=n(n^4-1)K=(n^5-n)K$$

5 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat : n^5-n est divisible par 5. Par suite, $n^{13}-n$ est divisible par 5

$$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^2)^6-1]$$

On utilise le résultat de l'exercice précédent :

$$(n^2)^6-1 \text{ est un multiple de } n^2-1.$$

$$\text{Donc il existe } K' \in \mathbb{N} \text{ tel que : } (n^2)^6-1=(n^2-1)K'$$

$$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=(n^3-n)K'$$

3 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat : n^3-n est divisible par 3.

Par suite, $n^{13}-n$ est divisible par 3.

$$n^{13}-n=n(n^{12}-1)$$

On utilise le résultat de l'exercice précédent :

$$n^{12}-1 \text{ est un multiple de } n-1$$

$$\text{Donc il existe } K'' \in \mathbb{N} \text{ tel que : } n^{12}-1=(n-1)K''$$

$$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n(n-1)K''=(n^2-n)K''$$

2 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat : n^2-n est divisible par 2.

Par suite, $n^{13}-n$ est divisible par 2.

Exercice50 :

1) Soient p et q deux nombres premiers distincts montrer que $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 [pq]$

2) Considérons dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$$(E) : x^4 + 781 = 3y^4$$

Et soit S son ensemble de solution :

a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{Z}) (x^4 \equiv 1 [5] \text{ ou } x^4 \equiv 0 [5])$

b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{Z}) (x^4 + 781 \equiv 2 [5] \text{ ou } x^4 + 781 \equiv 1 [5])$

c) Déterminer l'ensemble S .

Exercice23 : Soit Le nombre $n = \overline{2987}_{(10)}$

Écrire n dans la base 6 :

Solution :

$$\text{On a : } 2987 = 6 \times 497 + 5$$

$$497 = 6 \times 82 + 5$$

$$82 = 6 \times 13 + 4$$

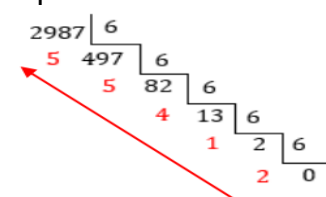
$$13 = 6 \times 2 + 1$$

$$2 = 6 \times 0 + 2$$

$$\text{Donc } 2987 = 2 \times 6^4 + 1 \times 6^3 + 4 \times 6^2 + 5 \times 6 + 5$$

$$n = \overline{21455}_{(6)}$$

Cette succession de divisions Euclidiennes se représente comme suite :



Exercice24 : soit $N = \overline{dcba}_{(10)}$ un entier naturel
montrer que : $N \equiv a - b + c - d [11]$

Solution :

$$\text{on a : } N = \overline{dcba} = a + b \times 10 + c \times 10^2 + d \times 10^3$$

$$\text{et on a : } 10 \equiv -1 [11] \text{ et } 10^2 \equiv 1 [11] \text{ et } 10^3 \equiv -1 [11]$$

$$\text{Donc : } N \equiv a - b + c - d [11]$$

Exercice25 : calculer :

$$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)}$$

Solution :

a) La décomposition :

$$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} = 2 \times 7^3 + 5 \times 7^2 + 3 \times 7^1 + 4 \times 7^0 + 6 \times 7^2 + 3 \times 7^1 + 1 \times 7^0$$

$$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} = 2 \times 7^3 + 11 \times 7^2 + 6 \times 7^1 + 5 \times 7^0$$

$$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} = 3 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 6 \times 7^1 + 5 \times 7^0$$

$$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} = \overline{3465}_{(7)}$$

b) Calcul direct avec le retenu

$$\begin{array}{r} 1 \\ \overline{2534}_{(7)} \\ + \overline{631}_{(7)} \\ \hline = \overline{3465}_{(7)} \end{array}$$

Exercice26: calculer

$$1) \overline{327}_{(8)} \times \overline{56}_{(8)} \quad 2) \overline{432}_{(5)} \times \overline{134}_{(5)}$$

Solution : Il est préférable d'effectuer le produit en utilisant le calcul direct avec le retenu car la décomposition risque d'être longue :

$$\overline{327}_{(8)} \times \overline{56}_{(8)} = \overline{23242}_{(8)}$$

$$\text{Pour vérifier : } \overline{327}_{(8)} \times \overline{56}_{(8)}$$

$$= (3 \times 8^2 + 2 \times 8 + 7) \times (5 \times 8 + 6)$$

$$= 9890 = \overline{23242}_{(8)}$$

$$2) \overline{432}_{(5)} \times \overline{134}_{(5)}$$

$$= (4 \times 5^2 + 3 \times 5 + 2) \times (1 \times 5^2 + 3 \times 5 + 4)$$

$$= 4 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 12 \times 5^3 + 9 \times 5^2 + 6 \times 5 + 16 \times 5^2 + 12 \times 5 + 8$$

$$= 5^5 + 3 \times 5^4 + 5^3 + 4 \times 5 + 3$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 25 \\ \times \overline{327}_{(8)} \\ \times \overline{56}_{(8)} \\ \hline 2412 \\ + 2063 \\ \hline = \overline{23242}_{(8)} \end{array}$$

$$= \overline{131043}_{(5)}$$

Exercice27 : effectuer dans la base 9

$$6432_{(7)} \times 54_{(8)}$$

Solution :

$$6432_{(7)} \times 54_{(8)} =$$

$$= (6 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 3 \times 7 + 2) \times (5 \times 8 + 4)$$

$$= 100188$$

$$= 1 \times 9^5 + 6 \times 9^4 + 2 \times 9^3 + 3 \times 9^2 + 8 \times 9 + 0$$

$$= \overline{162380}_{(9)}$$

Exercice28 : montrer que

$$1) x \equiv 0 [5] \Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ ou } a_0 = 5$$

$$2) x \equiv 0 [25] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \in \{0, 25, 50, 75\}$$

$$3) x \equiv 0 [3] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i \equiv 0 [3]$$

$$4) x \equiv 0 [9] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i \equiv 0 [9]$$

$$5) x \equiv 0 [11] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i \equiv 0 [11]$$

$$6) x \equiv 0 [4] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \equiv 0 [4]$$

Exercice29 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$$

$$\text{où } (a_n; b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

$$\text{Montrer que : } a_n \wedge b_n = 1$$

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

En développant $(1 + \sqrt{2})^n$ par la formule du binôme de Newton et en séparant les termes où $\sqrt{2}$ apparaît à un exposant pair des termes où $\sqrt{2}$ apparaît à un exposant impair, on écrit

$(1 + \sqrt{2})^n$ sous la forme $a_n + b_n \sqrt{2}$ où

$$(a_n; b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2. \text{ Un calcul conjugué fournit}$$

$$(1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n \sqrt{2} \text{ et donc :}$$

$$(1 - \sqrt{2})^n (1 + \sqrt{2})^n = (-1)^n = (a_n + b_n \sqrt{2})(a_n - b_n \sqrt{2})$$

$$(-1)^n = a_n^2 - 2b_n^2 \text{ Ou finalement :}$$

$$((-1)^n \times a_n) a_n + (2(-1)^{n+1} \times b_n) \times b_n = 1$$

$$\text{donc : } u a_n + v b_n = 1$$

$$\text{où } u = (-1)^n \times a_n \text{ et } v = 2(-1)^{n+1} \times b_n$$

$$\text{Sont des entiers relatifs. Le théorème de Bézout}$$

permet d'affirmer a_n et b_n sont premiers

Entre eux.

Exercice30 :1) Montrer que $\forall (k; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1} \text{ et } (n+1) C_{2n}^{n-1} = n C_{2n}^n$$

2) Montrer que $\forall (k; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$k \wedge n = 1 \Rightarrow \cancel{n/C_n^k}$$

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \cancel{n+1/C_{2n}^n}$

Solution : 1)

$$k C_n^k = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n C_{n-1}^{k-1}$$

$$(n+1) C_{2n}^{n-1} = (n+1) \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}$$

$$n C_{2n}^n = n \frac{(2n)!}{n!(n)!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n)!} \text{ cqfd}$$

2) on a : $k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$ Donc $\cancel{n/k C_n^k}$ et puisque

k et n sont premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que $\cancel{n/C_n^k}$

3) De même, on a : $(n+1) C_{2n}^{n-1} = n C_{2n}^n$

Donc : $\cancel{n+1/n C_{2n}^n}$ et on montre que

n et $(n+1)$ sont premiers entre

eux (d'après Bézout puisque $(n+1) - n = 1$

donc d'après le théorème de Gauss : $\cancel{n+1/C_{2n}^n}$

Exercice 31 : Pour $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ (Nombres de Fermat). Montrer que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.

Solution :

Soient n et m deux entiers naturels tels que $n < m$. Posons $m = n + k$ avec $k > 0$. On note que

$$F_m = 2^{2^{n+k}} + 1 = (2^{2^n})^{2^k} + 1 = (F_n - 1)^{2^k} + 1$$

En développant l'expression précédente par la formule du binôme de Newton et en tenant compte du fait que 2^k est pair

Puisque k est strictement positif, on obtient une expression de la forme

$$F_m = q F_n + 1 + 1 = q F_n + 2 \text{ Où } q \text{ est un entier.}$$

Le PGCD de F_n et F_m doit encore diviser :

$$F_m - q F_n = 2 \text{ et vaut donc 1 ou 2. Enfin, puisque}$$

2^n et 2^m sont strictement positifs F_n et F_m sont impairs et leur PGCD vaut donc 1 (ce résultat redémontre aussi l'existence d'une infinité de nombres premiers).

Exercice 32 :

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}, \frac{6}{5n^3 + n}$

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{7}{4^{2^n} + 2^{2^n} + 1}$

Solution :

1) Soit n un entier relatif.

• Si n est pair, alors $5n^3 + n \equiv 5 \times 0^3 + 0 \pmod{2}$ ou encore $5n^3 + n \equiv 0 \pmod{2}$. Dans ce cas, $5n^3 + n$ est divisible par 2.

Si n est impair, alors $5n^3 + n \equiv 5 \times 1^3 + 1 \pmod{2}$ ou encore $5n^3 + n \equiv 6 \pmod{2}$ ou enfin $5n^3 + n \equiv 0 \pmod{2}$. Dans ce cas aussi, $5n^3 + n$ est divisible par 2.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{Z}, 2 \mid (5n^3 + n)$.

• Si n est multiple de 3, alors :

$5n^3 + n \equiv 5 \times 0^3 + 0 \pmod{3}$ ou encore $5n^3 + n \equiv 0 \pmod{3}$.

Dans ce cas, $5n^3 + n$ est divisible par 3.

Si n est de la forme $3k + 1$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors

$5n^3 + n \equiv 5 \times 1^3 + 1 \pmod{3}$ puis $5n^3 + n \equiv 6 \pmod{3}$ et donc $5n^3 + n \equiv 0 \pmod{3}$.

Par suite, $5n^3 + n$ est divisible par 3.

Si n est de la forme $3k + 2$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors ,

$5n^3 + n \equiv 5 \times 2^3 + 2 \pmod{3}$ puis $5n^3 + n \equiv 42 \pmod{3}$ et donc $5n^3 + n \equiv 0 \pmod{3}$.

Dans ce cas aussi, $5n^3 + n$ est divisible par 3.

Finalement, $\forall n \in \mathbb{Z}, 3 \mid (5n^3 + n)$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $5n^3 + n$ est divisible par les nombres premiers 2 et 3 et donc par :

$2 \times 3 = 6$. On a montré que $\forall n \in \mathbb{Z}, 6 \mid (5n^3 + n)$.

2) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{7}{4^{2^n} + 2^{2^n} + 1}$

2) 4^{2^n} signifie $(\dots((4^2)^2)\dots)^2$

Etudions la suite de ces élévations au carré successives modulo 7.

$4^{2^0} = 4$ et donc $4^{2^0} \equiv 4 \pmod{7}$.

Ensuite, $4^{2^1} \equiv 16 \pmod{7}$ ou encore $4^{2^1} \equiv 2 \pmod{7}$.

Ensuite, $4^{2^2} \equiv 2^2 \pmod{7}$ ou encore $4^{2^2} \equiv 4 \pmod{7}$...

Montrons par récurrence que :

$\forall k \in \mathbb{N}, 4^{2^{2k}} \equiv 4 \pmod{7}$ et $4^{2^{2k+1}} \equiv 2 \pmod{7}$.

• C'est vrai pour $k = 0$.

• Soit $k > 0$. Supposons que :

$4^{2^{2k}} \equiv 4 \pmod{7}$ et $4^{2^{2k+1}} \equiv 2 \pmod{7}$.

Alors : $4^{2^{2k+2}} = \left(4^{2^{2k+1}}\right)^2 \equiv (2)^2 \equiv 4 \pmod{7}$

$4^{2^{2k+3}} = \left(4^{2^{2k+2}}\right)^2 \equiv (4)^2 \pmod{7} \equiv 2 \pmod{7}$

On a montré par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$

$4^{2^{2k}} \equiv 4 \pmod{7}$ et $4^{2^{2k+1}} \equiv 2 \pmod{7}$.

Ensuite 2

$2^{2^0} \equiv 2 \pmod{7}$ et $2^{2^1} \equiv 4 \pmod{7}$

puis, pour $n > 1$, $2^{2^n} = 2^{2 \times 2^{n-1}} = (2^2)^{2^{n-1}} = 4^{2^{n-1}} = 2$

donc : $2^{2^{2k}} \equiv 2 \pmod{7}$ et $2^{2^{2k+1}} \equiv 4 \pmod{7}$.

Ainsi, que n soit pair ou impair $4^{2^n} + 2^{2^n} \equiv 6 \pmod{7}$

donc : $4^{2^n} + 2^{2^n} + 1 \equiv 0 \pmod{7}$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{7}{4^{2^n} + 2^{2^n} + 1}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs

et exercices

Que l'on devient un mathématicien