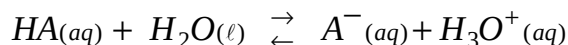


- Chimie -1- Etude d'une solution aqueuse d'un acide HA :1-1- Equation chimique de la réaction :1-2- * Taux d'avancement final τ :

$$\tau = \frac{x_f}{x_m} = \frac{[H_3O^+]}{C} \Rightarrow \tau = \frac{10^{-pH}}{C}$$

$$\text{- A.N : } \tau = \frac{10^{-3,44}}{10^{-2}} \approx 0,0363 = 3,63\%$$

* Espèce chimique prédominante :

$$\tau = \frac{[A^-]}{C} = \frac{[A^-]}{[AH] + [A^-]} \Rightarrow \frac{[AH] + [A^-]}{[A^-]} = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \frac{[AH]}{[A^-]} + 1 = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \frac{[AH]}{[A^-]} = \frac{1-\tau}{\tau}$$

$$\text{- A.N : } \frac{[AH]}{[A^-]} = \frac{1-0,0363}{0,0363} \approx 26,5 \text{ c.à.d } [AH] \gg [A^-] \Rightarrow AH \text{ est l'espèce prédominante.}$$

1-3- * Expression de pK_A :

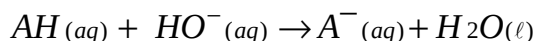
$$\text{- } pK_A = -\text{Log}(K_A) = -\text{Log}\left(\frac{[H_3O^+] \times [A^-]}{[AH]}\right) \quad (1)$$

$$\text{- } [H_3O^+] = [A^-] = 10^{-pH} \quad (2) \text{ et } [AH] = C - [H_3O^+] = C - 10^{-pH} \quad (3)$$

$$\text{- On remplace (2) et (3) dans (1), on aura : } pK_A = -\text{Log}\left(\frac{10^{-2 \cdot pH}}{C - 10^{-pH}}\right)$$

* Valeur de pK_A :

$$pK_A = -\text{Log}\left(\frac{10^{-2 \times 3,44}}{10^{-2} - 10^{-3,44}}\right) \approx 4,86$$

1-4-1- Equation chimique de la réaction :1-4-2- Valeur de V_B pour lequel $pH=5,50$:

- Dressons le tableau d'avancement :

Equation de la réaction		$AH(aq) + HO^-(aq) \rightarrow A^-(aq) + H_2O(\ell)$			
Etat du système	Avancement $x(\text{mol})$	Quantités de matière (mol)			
Etat initial	0	$C.V_A$	$C.V_B$	0	en excès
Etat final	$x_{\max}$	$C.V_A - x_{\max}$	$C.V_B - x_{\max}$	$x_{\max}$	en excès

- Pour $V_B < V_{BE} = 20\text{mL}$: le réactif limitant est l'espèce HO^- ; donc :

$$C.V_B - x_{\max} = 0 \text{ ou } x_{\max} = C.V_B$$

- On sait que : $pH = pK_A + \text{Log}\left(\frac{[A^-]}{[AH]}\right) \Rightarrow \frac{[A^-]}{[AH]} = 10^{pH - pK_A}$ (1)

- D'autre part : $\frac{[A^-]}{[AH]} = \frac{x_{\max}}{C.V_A - x_{\max}} \Rightarrow \frac{[A^-]}{[AH]} = \frac{C.V_B}{C.V_A - C.V_B} \Rightarrow \frac{[A^-]}{[AH]} = \frac{V_B}{V_A - V_B}$ (2)

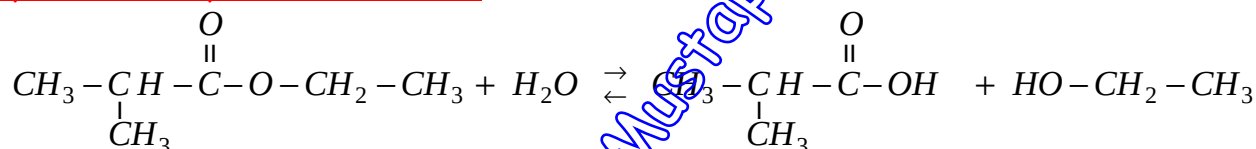
- Les deux relations (1) et (2) conduisent à écrire :

$$\frac{V_B}{V_A - V_B} = 10^{pH - pK_A} \Rightarrow V_B = V_A \cdot \frac{10^{pH - pK_A}}{1 + 10^{pH - pK_A}}$$

- **A.N :** $V_B = 20 \times \frac{10^{5,50 - 4,86}}{1 + 10^{5,50 - 4,86}} \approx 16,3 \text{ mL}$

2- Hydrolyse d'un ester :

2-1- Equation chimique de la réaction :



2-2- Temps de demi-réaction de la transformation (1) :

Equation de la réaction		Ester + H ₂ O $\rightleftharpoons$ Acide + Alcool			
Etat du système	Avancement x(mol)	Quantités de matière (mol)			
Etat initial	0	$n_0(E)$	$n_0(E)$	0	0
Etat intermédiaire $t = t_{1/2}$	$x(t_{1/2})$	$n_0(E) - x(t_{1/2})$	$n_0(E) - x(t_{1/2})$	$x(t_{1/2})$	$x(t_{1/2})$
Etat final	x_f	$n_0(E) - x_f$	$n_0(E) - x_f$	x_f	x_f

- Cherchons la quantité de matière restante $n_{t_{1/2}}(E)$ de l'ester E à l'instant $t_{1/2}$:

- On a d'après le tableau : $n_{t_{1/2}}(E) = n_0(E) - x(t_{1/2})$ avec $x(t_{1/2}) = \frac{x_f}{2}$ et $n_f(E) = n_0(E) - x_f$

- Donc on peut écrire : $n_{t_{1/2}}(E) = n_0(E) - \frac{x_f}{2} \Rightarrow n_{t_{1/2}}(E) = n_0(E) - \frac{n_0(E) - n_f(E)}{2}$

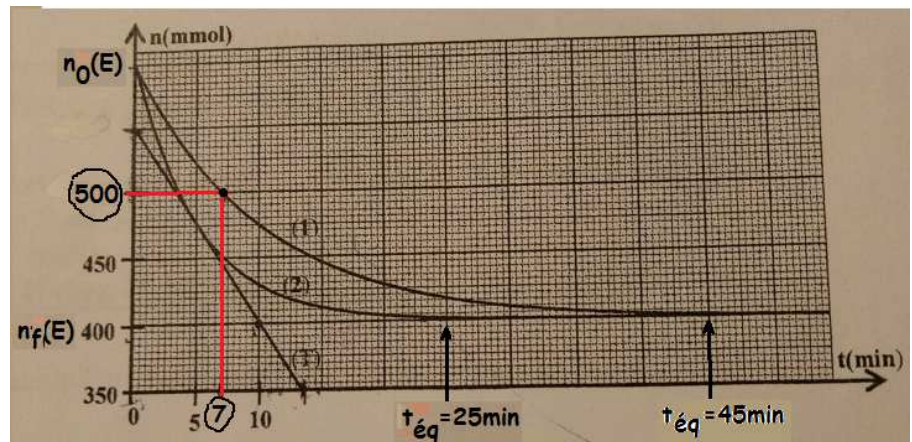
$$n_{t_{1/2}}(E) = \frac{n_0(E) + n_f(E)}{2}$$

- Graphiquement, on trouve : $n_0(E) = 600 \text{ mmol}$ et $n_f(E) = 400 \text{ mmol}$

- **A.N :** $n_{t_{1/2}}(E) = \frac{600 + 400}{2} = 500 \text{ mmol}$

On repère la quantité 500mmol sur l'axe vertical, et par projection on trouve le temps de demi-réaction :

$$t_{1/2} \approx 7 \text{ min}$$



2-3- Courbe correspondant à la réaction sans catalyseur :

La courbe (1) correspond à la réaction d'hydrolyse sans catalyseur, car l'équilibre est atteint après écoulement de 45min, contrairement à l'écoulement uniquement de 25min pour atteindre l'équilibre en utilisant un catalyseur correspondant à la courbe (2).

2-4- Vitesse volumique de réaction à $t_1 = 5 \text{ min}$:

- Par définition : $v(t) = \frac{1}{V_0} \cdot \frac{dx(t)}{dt}$ avec $x(t) = n_0(E) - n_t(E)$

- L'expression devient : $v(t) = -\frac{1}{V_0} \cdot \frac{dn_t(E)}{dt}$

$$\text{- A } t_1 = 5 \text{ min} : v(5 \text{ min}) \approx -\frac{1}{V_0} \cdot \frac{\Delta n_t(E)}{\Delta t} = \frac{1}{71 \cdot 10^{-3}} \times \frac{(550 - 400) \cdot 10^{-3}}{0 - 10}$$

$$v(5 \text{ min}) \approx 0,21 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

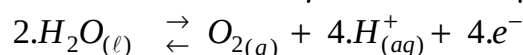
3- Electrolyse de l'eau :

3-1- Les affirmations exactes :

- L'anode est liée à la borne positive du générateur ;
- Une transformation forcée s'effectue dans le sens inverse d'une transformation spontanée.
- Le courant électrique sort par la cathode de l'électrolyseur.

3-2- Equation de la réaction à l'anode :

A l'anode, il se produit une réaction d'oxydation de l'espèce H_2O :

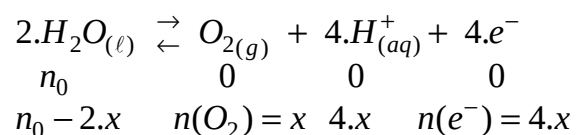


3-3- * Expression du volume de O_2 formé à l'instant t :

- En se basant sur le tableau d'avancement, on trouve :

$$n(e^-) = 4.x = 4. \frac{V}{V_m} \text{ et } n(e^-) = \frac{I \times \Delta t}{N_A \times e}$$

$$\text{donc } V = \frac{I \cdot \Delta t}{4 \cdot N_A \cdot e} \cdot V_m$$



**Correction du sujet de l'examen national du Baccalauréat
Session normale : 2018**

page 4

- A.N : $V = \frac{0,2 \times 8 \times 60}{4 \times 6,02 \cdot 10^{23} \times 1,6 \cdot 10^{-19}} \times 24 \approx 5,6 \cdot 10^{-3} L = 5,6 mL$

- Physique -

Exercice 1 : Transformations nucléaires

1- Radioactivité α du radium ${}^{226}_{88}\text{Ra}$:

1-1- Définition :

L'énergie de liaison d'un noyau atomique est l'énergie qu'il faut fournir au noyau pour le dissocier en ses nucléons,

1-2- La proposition juste :

c) Après une durée égale à $3.t_{1/2}$; il reste $12,5\% (= \frac{100}{2^3} \%)$ des noyaux initiaux.

(On applique la relation : $N(n.t_{1/2}) = \frac{1}{2^n} \times N_0$)

1-3- Montrons que $1\text{Ci} \approx 3,73 \cdot 10^{10} \text{Bq}$:

- La curie 1Ci est l'activité de 1g de radium 226

- $1\text{Ci} = A(m=1\text{g}) \Rightarrow 1\text{Ci} = \lambda \cdot N(m=1\text{g}) \Rightarrow 1\text{Ci} = \lambda \cdot \frac{m(=1\text{g})}{m_{\text{noy}}} \Rightarrow 1\text{Ci} = \lambda \cdot \frac{m(=1\text{g})}{M} \cdot N_A$

- A.N : $1\text{Ci} = 1,4 \cdot 10^{-11} \times \frac{1}{226} \times 6,02 \cdot 10^{23} \approx 3,73 \cdot 10^{10} \text{Bq}$

1-4- L'activité d'un échantillon en Juin 2018 :

- En Juin 1898 : $A(t_0 = 0) = 1\text{Ci} = 3,73 \cdot 10^{10} \text{Bq}$

- En Juin 2018 : $A(t) = A(t_0 = 0) \cdot e^{-\lambda t}$ avec $t = \Delta t = 2018 - 1898 = 120 \text{ans}$

- A.N : $A(t) = 3,73 \cdot 10^{10} \times e^{-(1,4 \cdot 10^{-11} \times 120 \times 365,25 \times 24 \times 3600)} \approx 3,54 \cdot 10^{10} \text{Bq}$

1-5- Calcul de l'énergie produite par la désintégration d'un noyau du radium 226 :

- L'équation de désintégration est : ${}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^4_2\text{He}$

- L'énergie libérée est : $E_{\text{lib}} = |\Delta E| = \left| E_{\ell}({}^{226}_{88}\text{Ra}) - E_{\ell}({}^4_2\text{He}) - E_{\ell}({}^{222}_{86}\text{Rn}) \right|$

- A.N : $E_{\text{lib}} = |1,7311 \cdot 10^3 - 28,4 - 1,7074 \cdot 10^3| \approx 4,7 \text{MeV}$

2- Mouvement de α dans un champ magnétique uniforme :

2-1- Nature du mouvement de la particule α :

* Expression de l'accélération :

La particule α est soumise uniquement à la force de Lorentz : $\vec{F} = 2e \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$

Par application de la 2^{ème} loi de Newton dans un référentiel galiléen : $m(\alpha) \cdot \vec{a} = 2e \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$

On en déduit : $\vec{a} = \frac{2e}{m(\alpha)} \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$; cette relation montre que le vecteur accélération est

perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}$.

* Energie cinétique de la particule α :

On a : $\frac{dE_c}{dt} = \underbrace{P}_{\text{puissance}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ car $\vec{F}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$

Cela prouve que l'énergie cinétique de la particule est constante, et par suite le mouvement est uniforme.

* Le mouvement de α est plan :

Posons $\vec{B} = B\vec{k}$ alors $\vec{a} = \frac{2eB}{m(\alpha)} \cdot \vec{v} \wedge \vec{k}$ ce qui montre que

la composante a_z de l'accélération est nulle $a_z = 0$

et par intégration et application des conditions initiales

on en déduit que $z = 0$

Donc le mouvement de α se fait dans le plan (π) .

* Le mouvement de α est circulaire :

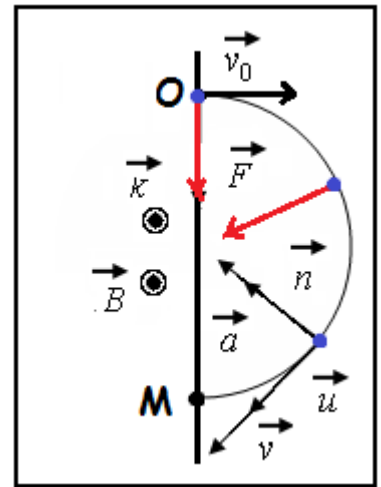
Dans le repère de Fresnet $M(\vec{u}, \vec{n})$; la composante tangentielle de l'accélération est nulle :

$a = a_n$ avec $a = \frac{2eB}{m(\alpha)} v_0$ et $a_n = \frac{v_0^2}{\rho}$ ρ est le rayon de courbure

On écrit alors : $a = \frac{2eB}{m(\alpha)} v_0 = \frac{v_0^2}{\rho}$ ou bien : $\rho = \frac{m(\alpha) \cdot v_0}{2eB} = \text{Cte}$

Donc le mouvement est circulaire et uniforme, et le rayon est : $OM = R = \frac{m(\alpha) \cdot v_0}{2eB}$

- A.N : $OM = \frac{6,6447 \cdot 10^{-27} \times 1,5 \cdot 10^7}{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 1,5} \approx 0,207 \text{ m} = 20,7 \text{ cm}$



Exercice 2 : Electricité

I- Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension :

1- Equation différentielle vérifiée par la tension u_c :

D'après la figure1 : $u_R + u_C = E$ (1)

En respectant les conventions : $u_R = R \cdot i = R \cdot \frac{dq}{dt} = RC \cdot \frac{du_C}{dt}$

La relation (1) devient : $RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E$ ou bien $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{E}{RC}$

2- * Détermination de E :

- L'équation de la fonction $\frac{du_C}{dt} = f(u_C)$ est de la forme : $\frac{du_C}{dt} = A.u_C + B$
- L'équation différentielle peut s'écrire : $\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{RC} u_C + \frac{E}{RC}$
- Lorsque $\frac{du_C}{dt} = 0$ alors $E = u_C$ et graphiquement (figure2) on trouve $\underline{E = 6V}$

*** Vérification de $C = 10 \text{ nF}$:**

- On pose $A = -\frac{1}{RC}$: le coefficient directeur de la droite

$$\text{Alors } C = -\frac{1}{R \times A} = -\frac{1}{2.10^3 \times \frac{6 \times 5.10^4 - 0}{0 - 6}} \Rightarrow C = 10^{-8} \text{ F} = 10 \text{ nF}$$

3- Détermination de la valeur du rendement ρ :

- Par définition : $\rho = \frac{E_e}{E_g}$
- En régime permanent $u_C(\infty) = E$ alors $E_e = \frac{1}{2} C . u_C^2 = \frac{1}{2} C . E^2$ et $E_g = C . E^2$
- Donc : $\rho = \frac{E_e}{E_g} = \frac{\frac{1}{2} C . E^2}{C . E^2} \Rightarrow \underline{\rho = 0,50 = 50\%}$

II - Réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension :**1-1- Equation différentielle vérifiée par $i(t)$:**

- D'après la loi d'additivité des tensions : $u_b + u_{R_1} = E$ (1)
- En respectant les conventions : $u_b = L . \frac{di}{dt} + r . i$ et $u_{R_1} = R_1 . i$

$$\text{Alors (1) s'écrit : } L . \frac{di}{dt} + (r + R_1) . i = E \quad \text{ou bien} \quad \frac{di}{dt} + \frac{(r + R_1)}{L} . i = \frac{E}{L}$$

1-2- * Détermination de R_1 :

- Au régime permanent : $\underbrace{\left(\frac{di}{dt} \right)}_{=0} + \frac{(r + R_1)}{L} . i_{\max} = \frac{E}{L} \Rightarrow (r + R_1) . i_{\max} = E$

$$\text{- Finalement : } R_1 = \frac{E}{i_{\max}} - r$$

$$\text{- A.N : } R_1 = \frac{6}{50.10^{-3}} - 20 = \underline{100\Omega}$$

**Correction du sujet de l'examen national du Baccalauréat
Session normale : 2018**

*** Vérification de $L = 0,3H$:**

- La constante de temps du circuit RL : $\tau = \frac{L}{r + R_1}$
- On en déduit que : $L = \tau \times (r + R_1)$ avec $\tau = 2,5ms$ (figure 4)
- A.N : $L = 2,5 \cdot 10^{-3} \times (20 + 100) = 0,3H$

1-3- Calcul de u_b au régime permanent :

- L'équation différentielle donne : $(u_b)_\infty = E - (u_{R_1})_\infty \Rightarrow (u_b)_\infty = E - R_1 \cdot i_{\max}$
- A.N : $(u_b)_\infty = 6 - 100 \times 0,05 = 1V$

2-1- Valeur de i juste après l'ouverture de l'interrupteur K :

L'intensité $i(t)$ est une fonction continue : $i(t=0) = i_{\max} = 50mA$

2-2- * Valeur de $\frac{di(t)}{dt}$ à $t=0$:

- D'après la loi d'additivité des tensions : $u_b + u_{R_1} + u_{R_2} = 0$ (1)
- En respectant les conventions : $u_b = L \cdot \frac{di(t)}{dt} + r \cdot i$; $u_{R_1} = R_1 \cdot i$ et $u_{R_2} = R_2 \cdot i$

Alors (1) s'écrit : $L \cdot \frac{di}{dt} + (r + R_1 + R_2) \cdot i = 0$ ou bien $\left(\frac{di(t)}{dt} \right)_{t=0} = - \frac{(r + R_1 + R_2)}{L} \cdot i_{\max}$

- A.N : $\left(\frac{di(t)}{dt} \right)_{t=0} = - \frac{(20 + 100 + 2000)}{0,3} \times 50 \cdot 10^{-3} = -3,53 \cdot 10^2 A.s^{-1}$

*** Calcul de u_b à l'ouverture de l'interrupteur K :**

- L'expression est : $u_b(0) = L \cdot \left(\frac{di(t)}{dt} \right)_{t=0} + r \cdot i_{\max}$
- A.N : $u_b(0) = 0,3 \times (-3,53 \cdot 10^2) + 20 \times 0,05 \approx -105V$

3- Rôle de la branche :

C'est pour éviter l'apparition des étincelles aux bornes de l'interrupteur au moment de son ouverture ; qui sont dues à la surtension aux bornes de la bobine : $u_b(0) \approx -105V$!!

III - Oscillateur RLC en régime forcé :**1- Fréquence de résonance N_0 :**

- A la résonance l'impédance Z du circuit RLC est minimale ;
- D'après la figure 5 ; on trouve : $N_0 = 0,5KH$; $Z = 500H$

2- Capacité C_1 du condensateur :

- A la résonance ; la relation est vérifiée : $L \cdot C_1 \cdot (2\pi N_0)^2 = 1$

- On en déduit que : $C_1 = \frac{1}{4\pi^2 \cdot L \cdot N_0^2}$

- A.N : $C_1 = \frac{1}{4 \times 10 \times 0,3 \times 500^2} \approx 3,3 \cdot 10^{-7} F = 0,33 \mu F$

3- * Relation entre Z , r et R_3 :

- Pour $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ on a : $U = Z \cdot I = Z \cdot \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

- A la résonance $I = I_0$ on a : $U = Z_0 \cdot I_0 = (r + R_3) \cdot I_0$

- Des deux relations on trouve : $Z = (r + R_3) \cdot \sqrt{2}$

* Déduction graphique de ΔN :

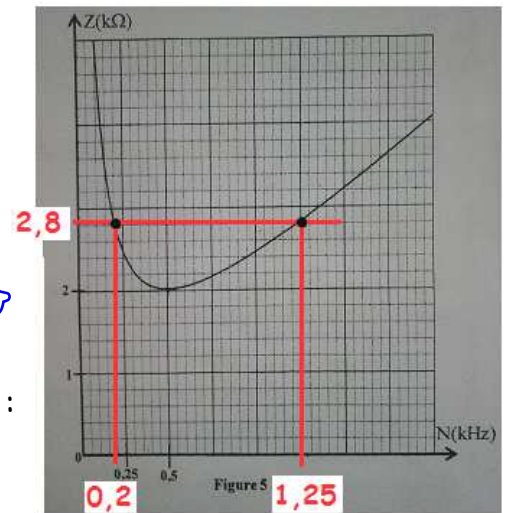
- Calcul de Z lorsque $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$:

$$Z = (20 + 1980) \cdot \sqrt{2} \approx 2828 \Omega \approx 2,8 K\Omega$$

- En exploitant la courbe de la fonction $Z = f(N)$; on trouve :

$$N_{\min} \approx 0,2 KHz \text{ et } N_{\max} \approx 1,25 KHz$$

$$d'où : \Delta N = N_{\max} - N_{\min} \approx 1,25 - 0,2 = 1,05 KHz$$



Exercice 3 : Mécanique

PARTIE I : Etude du mouvement d'un corps solide

1- Etude du mouvement du centre G dans l'air :

1-1- Equation différentielle régissant la vitesse V_z du centre d'inertie G :

- Système à étudier : {Le baigneur (S)}

- Repère d'étude $R (O ; \vec{k})$ suppose galiléen ;

- Bilan des forces extérieures :

Poids du corps seulement car la chute est libre : $\vec{P}$

- 2^{ème} loi de Newton : $\vec{P} = m \cdot \vec{a}_G$

- Projection de cette relation vectorielle sur l'axe Oz : $P_z = m \cdot a_z$ (*)

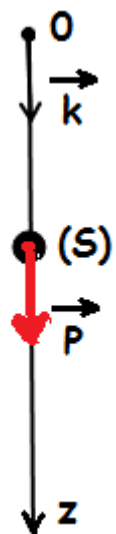
- Expression : $P_z = P = m \cdot g$ et $a_z = \frac{dv_z}{dt}$.

- La relation (*) devient : $m \cdot g = m \cdot \frac{dv_z}{dt}$

- Finalement l'équation différentielle est : $\frac{dv_z}{dt} = g$ (1)

1-2- * Temps de chute t_c :

En intégrant l'équation (1) : $v_z(t) = g \cdot t$ (2) ($v_z(0) = 0$)



En intégrant l'équation (2) : $z(t) = \frac{1}{2} g t^2$ (3) ($z(0) = 0$)

Le temps de chute t_c correspond à : $z(t_c) = h$

Donc : $\frac{1}{2} g t_c^2 = h \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

- A.N : $t_c = \sqrt{\frac{2 \times 10}{10}} \approx 1,4s$

* Vitesse v_e d'entrée dans l'eau :

- La relation (2) donne : $v_z(t_c) = g t_c$

- A.N : $v_e = v_z(t_c) = 10 \times 1,4 = 14 m.s^{-1}$

2- Etude du mouvement vertical du centre G dans l'eau :

2-1- Equation différentielle régissant la vitesse v_z du centre d'inertie G :

- Système à étudier : {Le baigneur (S)}

- Repère d'étude R (O ; $\vec{k}$) supposé galiléen ;

- Bilan des forces extérieures :

* Poids du corps : $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = mg \cdot \vec{k}$

* Force de frottement fluide : $\vec{f} = -\lambda \cdot \vec{v}_G = -\lambda v_z \cdot \vec{k}$

* Poussée d'Archimède : $\vec{F} = -\frac{m}{d} \cdot \vec{g} = -\frac{m}{d} g \cdot \vec{k}$

- 2^{ème} loi de Newton : $m \cdot \vec{a}_G = \vec{F} + \vec{f} + \vec{P}$

- Projection de cette relation vectorielle sur l'axe Oz : $m \cdot a_z = F_z + f_z + P_z$ (*)

- Expressions : $F_z = -\frac{m}{d} \cdot g$; $f_z = -\lambda \cdot v_z$; $P_z = P = m \cdot g$ et $a_z = \frac{dv_z}{dt}$.

- La relation (*) devient : $m \cdot \frac{dv_z}{dt} = (-\frac{m}{d} \cdot g) + (-\lambda \cdot v_z) + (m \cdot g)$

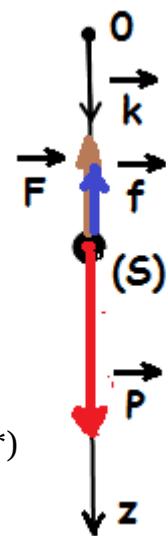
- ou bien : $\frac{dv_z}{dt} + \frac{\lambda}{m} \cdot v_z = g \cdot (1 - \frac{1}{d})$

- Finalement l'équation différentielle est : $\frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot v_z = g \cdot (1 - \frac{1}{d})$ avec $\tau = \frac{m}{\lambda}$

2-2- * Expression de la vitesse limite $v_{\ell z}$:

- Au régime permanent : $\frac{dv_z}{dt} = 0$ et $v_z = v_{\ell z}$

- L'équation différentielle devient : $0 + \frac{1}{\tau} \cdot v_{\ell z} = g \cdot (1 - \frac{1}{d})$



- Finalement la vitesse limite est : $v_{\ell z} = \tau.g.(1 - \frac{1}{d})$

* Calcul de la vitesse limite $V_{\ell z}$:

- **A.N** : $v_{\ell z} = \frac{80}{250} \times 10 \times (1 - \frac{1}{0,9}) \approx -0,36 \text{ m.s}^{-1}$

2-3- Expressions de A et B :

- La solution de l'équation différentielle est : $v_z(t) = A + B.e^{-\frac{t}{\tau}}$

- L'équation différentielle peut s'écrire : $\frac{d}{dt}(A + B.e^{-\frac{t}{\tau}}) + \frac{1}{\tau} \cdot (A + B.e^{-\frac{t}{\tau}}) = g.(1 - \frac{1}{d})$

$$\Rightarrow -\frac{B}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} \cdot (A + B.e^{-\frac{t}{\tau}}) = g.(1 - \frac{1}{d}) \Rightarrow \underbrace{-\frac{B}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} B.e^{-\frac{t}{\tau}}}_{=0} + \frac{1}{\tau} A = g.(1 - \frac{1}{d})$$

$$\Rightarrow A = \tau.g.(1 - \frac{1}{d}) \text{ ou } A = v_{\ell z}$$

- $v_z(t=0) = A + B.e^0 = A + B$ et $v_z(t=0) = v_e \Rightarrow B = v_e - v_{\ell z}$

2-4- Instant de retour t_r :

- C'est l'instant où le baigneur s'arrête pour rebrousser chemin : $v_z(t_r) = 0$

- On a aussi : $v_z(t_r) = v_{\ell z} + (v_e - v_{\ell z}).e^{-\frac{t_r}{\tau}}$

- Des deux relations on écrit : $v_{\ell z} + (v_e - v_{\ell z}).e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 0$

- Finalement on aboutit à l'expression : $t_r = -\tau.\ln\left(\frac{-v_{\ell z}}{v_e - v_{\ell z}}\right)$

- **A.N** : $t_r = -\frac{80}{250}.\ln\left(\frac{-(-0,36)}{14 - (-0,36)}\right) \approx 1,18 \text{ s}$

PARTIE II : Etude du mouvement d'un pendule élastique

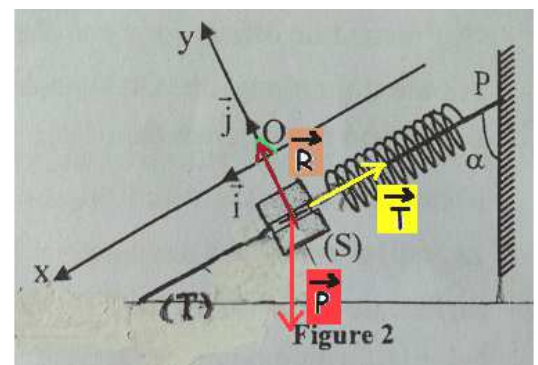
1- Expression de la longueur ℓ_e :

A l'équilibre : $\vec{T}_0 + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$, et par projection sur l'axe Ox incliné vers le bas, on aura :

$$T_{0x} + P_x + R_x = 0,$$

Alors : $\boxed{-K.\Delta\ell_{\text{eq}} + m.g.\cos(\alpha) + 0 = 0}$ avec $\Delta\ell_{\text{eq}} = \ell_e - \ell_0$

d'où : $\ell_e = \ell_0 + \frac{m.g.\cos(\alpha)}{K}$



2-1- Equation différentielle vérifiée par l'abscisse $x(t)$ du centre d'inertie G :

- Système à étudier : {solide(S)}

- Repère d'étude $R (O ; \vec{i} ; \vec{j})$ supposé galiléen ;

- Bilan des forces extérieures :

* Poids du solide (S) : $\vec{P}$ * Action du ressort : $\vec{T}$ * Action du plan incliné : $\vec{R}$ - La 2^{ème} loi de Newton donne : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G$;- Projection de cette relation vectorielle sur l'axe Ox :

$$P_x + T_x + R_x = m \cdot a_x \Rightarrow mg \cos(\alpha) - K(\Delta \ell_{eq} + x) + 0 = m \cdot \ddot{x} \Rightarrow \underbrace{mg \cos(\alpha) - K \Delta \ell_{eq}}_{=0} - K \cdot x = m \cdot \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m} \cdot x = 0$$

2-2- Expression numérique de $x(t)$:- L'expression de l'abscisse : $x(t) = x_{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$ - D'après la figure 3 : $x_{\max} = 3 \times 0,5 = 1,5 \text{ cm}$ - L'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ peut s'écrire :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m} \cdot x = 0 \text{ ou } \ddot{x} = -\frac{K}{m} \cdot x \text{ ou bien } a_x = -\frac{K}{m} \cdot x$$

- L'équation de la droite (figure 3) : $a_x = A \cdot x$

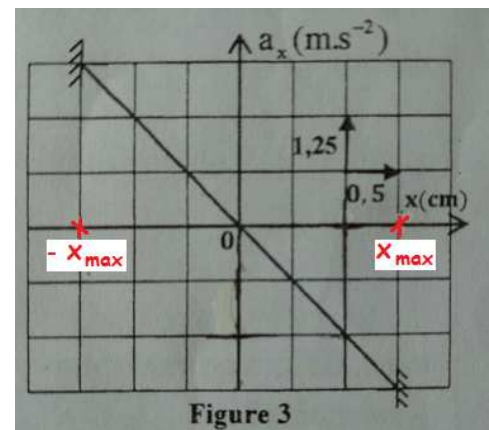
- En comparant les deux équations ; on identifie le coefficient directeur :

$$-\frac{K}{m} = A = \frac{\Delta a_x}{\Delta x} = \frac{1,25 - 0}{-0,5 \cdot 10^{-2} - 0} = -250 \text{ s}^{-2}$$

- Or on sait que : $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{-A}$ **A.N :** $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{-A} = \sqrt{250} = 15,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \approx 5 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ - D'une part d'après la condition initiale $x(0) = x_{\max}$

$$\text{D'autre part } x(0) = x_{\max} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \times 0 + \varphi\right) = x_{\max} \cdot \cos(\varphi)$$

$$\text{D'où } x_{\max} \cdot \cos(\varphi) = x_{\max} \Rightarrow \cos(\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

- Finalement : $\underset{\text{en m}}{x}(t) = 1,5 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(\underset{\text{en s}}{5 \cdot \pi \cdot t})$ 

3-1- Expression de l'énergie potentielle E_p :

- L'énergie potentielle totale est : $E_p = E_{pp} + E_{pe}$ (*)

- L'énergie potentielle de pesanteur est : $E_{pp} = m.g.z + C$; l'axe Oz est orienté vers le haut.

Or à $z=0$ on a $E_{pp}=0$ donc $C=0$; d'où $E_{pp} = -m.g.z$ avec $z = -x.\cos(\alpha)$

Donc $E_{pp} = -m.g.x.\cos(\alpha)$ (1)

- L'énergie potentielle élastique est : $E_{pe} = \frac{1}{2}.K.\Delta\ell^2 + C'$ avec $\Delta\ell = x + \Delta\ell_{eq}$

Or lorsque $\Delta\ell = \Delta\ell_{eq}$ on a $E_{pe}=0$ donc $C' = -\frac{1}{2}.K.\Delta\ell_{eq}^2$;

d'où $E_{pe} = \frac{1}{2}.K(x + \Delta\ell_{eq})^2 - \frac{1}{2}.K.\Delta\ell_{eq}^2$

En développant cette expression on aura : $E_{pe} = \frac{1}{2}.Kx^2 + Kx.\Delta\ell_{eq} + \frac{1}{2}.K.\Delta\ell_{eq}^2 - \frac{1}{2}.K.\Delta\ell_{eq}^2$

Donc : $E_{pe} = \frac{1}{2}.Kx^2 + Kx.\Delta\ell_{eq}$ (2)

- On porte (1) et (2) dans (*), on aura : $E_p = -mg.x.\cos(\alpha) + Kx.\Delta\ell_{eq} + \frac{1}{2}.K.x^2$

On peut simplifier cette expression : $E_p = \underbrace{(-mg.\cos(\alpha) + K\Delta\ell_{eq})}_{=0 \text{ à l'équilibre}}.x + \frac{1}{2}.K.x^2$

Finalement on aboutit à l'expression finale : $E_p = \frac{1}{2}.K.x^2$

3-2- * Valeur de la raideur K :

- L'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement de G : $E_m = E_c + E_p = Cte$

- Lorsque $x = x_{max}$:

$$E_c(x_{max}) = 0 \Rightarrow E_m(x_{max}) = E_p(x_{max}) = \frac{1}{2}.K.x_{max}^2$$

- Lorsque $x = 0$:

$$E_m(0) = E_c(0) + \underbrace{E_p(0)}_{=0}$$

$$\Rightarrow E_m(0) = E_c(0) = 9mJ = 9.10^{-3} J \text{ (voir figure 4)}$$

$$E_m(x_{max}) = E_m(0) \Rightarrow \frac{1}{2}.K.x_{max}^2 = 9.10^{-3}$$

$$\Rightarrow K = \frac{2 \times 9.10^{-3}}{(1,5.10^{-2})^2} = 80 N.m^{-1}$$

*** Valeur de la masse m :**

$$\text{On a trouvé que : } \frac{K}{m} = 250 s^{-2} \Rightarrow m = \frac{K}{250} = \frac{80}{250} = 0,32 Kg = 320g$$

