Correction de l'examen national 2021 session de rattrapage
Science math

Exercice I : Chimie (7 points)

Partie I : Quelques réactions avec l'ion ammonium

1-Etude d'une solution aqueuse de chlorure d'ammonium

1-1-L'équation de la réaction de NH_4^+ et l'eau :

$$\mathbf{NH_4^+{}_{(aq)} + H_2O_{(l)} \rightleftarrows NH_{3\,(aq)} + H_3O^+{}_{(aq)}}$$

1-2-L'expression de τ :

Equation de la réaction		$NH_4^+{}_{(aq)}$ +	$H_2O_{(l)}$ $\rightleftarrows$	$NH_{3\,(aq)}$ +	$H_3O^+{}_{(aq)}$
L'état	avancement	Quantité de matière en (mol)			
initial	0	$C.V$	En excès	0	0
intermédiaire	x	$C.V - x$	En excès	x	x
équilibre	$x_{éq}$	$C.V - x_{éq}$	En excès	$x_{éq}$	$x_{éq}$

On a : $$\tau = \frac{x_{éq}}{x_{max}}$$

Le réactif limitant est NH_4^+ car l'eau est utilisée en excès : $C.V - x_{max} = 0 \Leftrightarrow x_{max} = C.V$

D'après le tableau d'avancement :

$$[NH_4^+]_{éq} = \frac{C.V - x_{éq}}{V} = C - \frac{x_{éq}}{V} \quad ; \quad [H_3O^+]_{éq} = \frac{x_{éq}}{V} \ ; \ [C\ell^-]_{éq} = C$$

La conductivité s'écrit :

$$\sigma = [NH_4^+]_{éq}.\lambda(NH_4^+) + [H_3O^+]_{éq}.\lambda(H_3O^+) + [C\ell^-]_{éq}.\lambda(C\ell^-)$$

$$\sigma = \left(C - \frac{x_{éq}}{V}\right).\lambda_2 + \frac{x_{éq}}{V}\ .\lambda_1 + C.\lambda_3 \Leftrightarrow \sigma = \frac{x_{éq}}{V}(\lambda_1 - \lambda_2) + C.\lambda_2 + C.\lambda_3$$

$$\frac{x_{éq}}{V}(\lambda_1 - \lambda_2) = \sigma - C.(\lambda_2 + \lambda_3) \ \Leftrightarrow \ x_{éq} = \frac{V}{\lambda_1 - \lambda_2}[\sigma - C.(\lambda_2 + \lambda_3)]$$

$$\tau = \frac{x_{éq}}{x_{max}} \Leftrightarrow \tau = \frac{V}{\lambda_1 - \lambda_2}[\sigma - C.(\lambda_2 + \lambda_3)].\frac{1}{C.V}$$

$$\tau = \frac{[\sigma - C.(\lambda_2 + \lambda_3)]}{C(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

$$\tau = \frac{74{,}898.10^{-3} - 5{,}0.10^{-3}.10^3(7{,}34.10^{-3} + 7{,}63.10^{-3})}{5{,}0.10^{-3}.10^3 \times (34{,}9.10^{-3} - 7{,}34.10^{-3})} = 3{,}48.10^{-4}$$

$$\tau \approx 0{,}035\%$$

1-3-L'expression de K_A en fonction de C et τ :

$$K_A = Q_{r,éq} = \frac{[NH_3]_{éq}.[H_3O^+]_{éq}}{[NH_4^+]_{éq}}$$

$$\tau = \frac{x_{éq}}{x_{max}} \Longrightarrow x_{éq} = \tau.C.V$$

$$[H_3O^+]_{éq} = [NH_3]_{éq} = \frac{x_{éq}}{V} = \frac{\tau.C.V}{V} = C.\tau$$

$$[NH_4^+]_{éq} = C - \frac{x_{éq}}{V} = C - C.\tau = C(1-\tau)$$

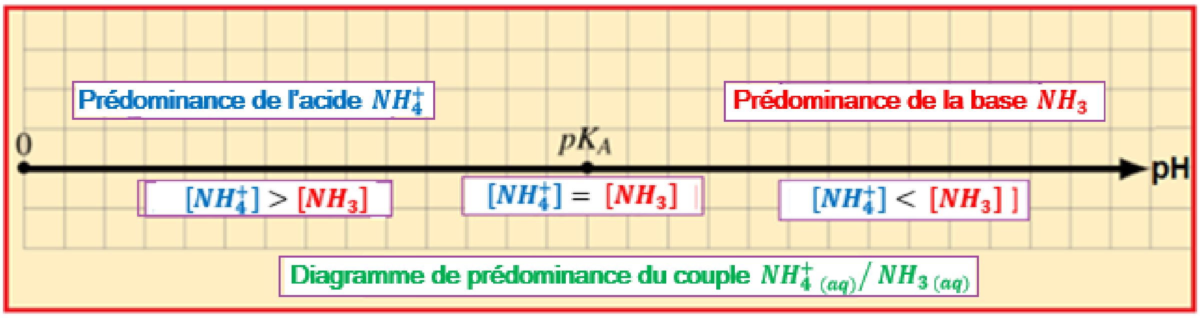
$$K_A = Q_{r,éq} = \frac{{[H_3O^+]_{éq}}^2}{[NH_4^+]_{éq}} = \frac{(C.V)^2}{C(1-\tau)} = \frac{C^2.\tau^2}{C(1-\tau)} \Leftrightarrow K_A = \frac{C.\tau^2}{1-\tau}$$

-Vérification de pK_A :

$$pK_A = -\log K_A$$

$$pK_A = -\log\left(\frac{C.\tau^2}{1-\tau}\right) \Leftrightarrow pK_A = -\log\left[\frac{5.10^{-3} \times (3{,}48.10^{-4})^2}{1 - 3{,}48.10^{-4}}\right] \Longrightarrow pK_A \simeq 9{,}2$$

1-4-le diagramme de prédominance du couple $NH_4^+{}_{(aq)}/NH_{3\,(aq)}$:



-L'espèce prédominante :

$$pH = -\log[H_3O^+] = -\log(C.\tau) = -\log(5{,}0.10^{-3} \times 3{,}48.10^{-4}) = 5{,}72$$

$$pH < pK_A \Leftrightarrow pK_A + \log\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]} < pK_A \Leftrightarrow \log\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]} < \log 1 \Leftrightarrow \frac{[NH_3]}{[NH_4^+]} < 1 \Leftrightarrow [NH_3] < [NH_4^+]$$

L'espèce prédominante du couple NH_4^+/NH_3 est l'espèce acide NH_4^+.

1-5-Nombre d'affirmations exactes : 2

a- Le taux d'avancement final de la réaction augmente. Faux

b- Le quotient de réaction à l'équilibre de la réaction reste constant. Exacte

c- L'avancement à l'équilibre ne varie pas. Faux

d- Le $pK_A(NH_4^+/NH_3)$ diminue. Faux

2-Dosage des ions ammonium dans un médicament

2-1-L'équation de la réaction du dosage :

$$\mathbf{NH_4^+{}_{(aq)} + HO^-{}_{(aq)} \rightleftarrows NH_{3\,(aq)} + H_2O_{(l)}}$$

2-2-La constante d'équilibre de la réaction du dosage :

$$K = Q_{r,éq} = \frac{[NH_3]_{éq}}{[NH_4^+]_{éq}.[HO^-]_{éq}}.\frac{[H_3O^+]_{éq}}{[H_3O^+]_{éq}} = \frac{[NH_3]_{éq}.[H_3O^+]_{éq}}{[NH_4^+]_{éq}}.\frac{1}{[H_3O^+]_{éq}.[HO^-]_{éq}}$$

$$K = \frac{K_A}{K_e} \Leftrightarrow K = \frac{10^{-pK_A}}{K_e}$$

A.N : $K = \frac{10^{-9,2}}{10^{-14}} \Leftrightarrow K = 6{,}31.10^4$

2-3-L'indication est-il vérifiée ?

Déterminant la concentration massique C_m de la solution S_1 :

$$C_m = C_A.M(NH_4C\ell) \implies C_m = 2{,}83.10^{-2}\,mol.L^{-1} \times 53{,}5\,g.mol^{-1} = 1{,}51\,g.L^{-1}$$

Oui l'indication portée sur le flacon est vérifiée car $C_m = C_0 = 1{,}51\,g.L^{-1}$.

Partie II : Pile nickel-argent :

1- L'équation de la réaction du fonctionnement de la pile :

Au niveau de la cathode se produit la réduction de Ag^+: $\mathbf{Ag^+_{(aq)} + e^- \rightleftarrows Ag_{(s)}}$ $\mathbf{Ag^+{}_{(aq)}/Ag_{(s)}}$

Au niveau de l'anode se produit l'oxydation de Ni : $\mathbf{Ni_{(s)} \rightleftarrows Ni^{2+}_{(aq)} + 2e^-}$ $\mathbf{Ni^{2+}{}_{(aq)}/Ni_{(s)}}$

L'équation bilan : $\mathbf{2Ag^+_{(aq)} + Ni_{(s)} \longrightarrow Ni^{2+}_{(aq)} + 2Ag_{(s)}}$

2-La capacité de la pile :

Le tableau d'avancement :

Equation de la réaction		$2Ag^+_{(aq)}$ +	$Ni_{(s)}$ →	$Ni^{2+}_{(aq)}$ +	$2Ag_{(s)}$	$n(e^-)$
L'état	avancement	Quantité de matière en (mol)				
initial	$x = 0$	$[Ag^+]_i.V$	$\frac{m_1}{M(Ni)}$	$[Ni^{2+}]_i.V$	بوفرة	$n(e^-) = 0$
final	$x = x_{max}$	$[Ag^+]_i.V - 2x_{max}$	$\frac{m_1}{M(Ni)} - x_{max}$	$[Ni^{2+}]_i.V + x_{max}$	بوفرة	$n(e^-) = 2x_{max}$

L'avancement maximal :

Le réactif limitant est Ag^+: $[Ag^+]_i.V - 2x_{max1} = 0 \Leftrightarrow x_{max1} = \frac{[Ag^+]_i.V}{2} = \frac{0{,}10\times0{,}1}{2} = 5.10^{-3}mol$

Le réactif limitant est Ni : $\frac{m_1}{M(Ni)} - x_{max2} = 0 \Leftrightarrow x_{max2} = \frac{m_1}{M(Ni)} = \frac{0{,}15}{58{,}7} = 2{,}55.10^{-2}mol$

L'avancement maximal est : $x_{max} = 5.10^{-3}$ mol

La capacité de la pile :

$$Q_{max} = n(e^-)_{max}.F \implies Q_{max} = 2x_{max}.F$$

$$Q_{max} = 2 \times 5.10^{-3} \times 9{,}65.10^4 \implies Q_{max} = 965\ C$$

3-La concentration des ions Ni^{2+} :

D'après le tableau d'avancement :

$$[Ni^{2+}] = \frac{[Ni^{2+}]_i.V + x}{V} = [Ni^{2+}]_i + \frac{x}{V}$$

$$\begin{cases} n(e^-) = 2x \\ n(e^-) = \frac{Q}{F} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} n(e^-) = 2x \\ n(e^-) = \frac{I.\Delta t}{F} \end{cases} \Leftrightarrow 2x = \frac{I.\Delta t}{F} \Leftrightarrow x = \frac{I.\Delta t}{2F}$$

$$[Ni^{2+}] = [Ni^{2+}]_i + \frac{I.\Delta t}{2FV}$$

A.N : $[Ni^{2+}] = 0,10 + \frac{0,2\times30\times60}{2\times9,65.10^4\times0,1} \Longrightarrow \boxed{[Ni^{2+}] \approx 0,12\ mol.L^{-1}}$

Exercice 2 : Ondes (2points)

1-Une onde lumineuse est-elle une onde mécanique ?

Non une onde lumineuse est une onde électromagnétique (car l'onde mécanique nécessite un milieu matériel pour se propager).

2-L'ordre de grandeur de a :

Condition pour observer le phénomène de diffraction : $10\lambda < a < 100\,\lambda \Leftrightarrow 10\lambda < a < 10^2\,\lambda$

Pour avoir le phénomène de diffraction l'ordre de grandeur de a doit être de l'ordre de λ .

3- Le nombre d'affirmations exactes : 2

a- La lumière est une onde transversal, dont la célérité est la même dans tous milieu transparent. Faux

b- La lumière monochromatique d'un laser est constituée de radiations d'une seule longueur d'onde mais de fréquences différentes. Faux

c- La dispersion de la lumière blanche dans le prisme montre que l'indice de réfraction du milieu varie avec la fréquence. Exacte

d- Le vide est parfaitement non dispersif. Exacte

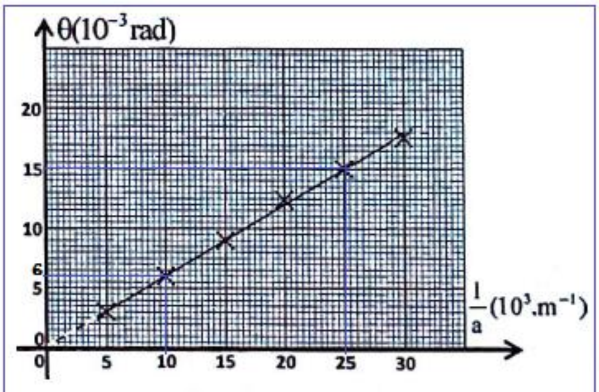


Figure 2

4-1- La longueur d'onde λ :

La courbe $\theta = f\left(\frac{1}{a}\right)$ est une fonction linéaire, son équation s'écrit : $\theta = K.\frac{1}{a}$ (1)

$$K = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\left(\frac{1}{a}\right)_2 - \left(\frac{1}{a}\right)_1} = \frac{(15-6).10^{-3}\ rad}{(25-10).10^3 m^{-1}} = 6.10^{-7}\ m$$

On a : $\theta = \frac{\lambda}{a} = \lambda.\frac{1}{a}$ (2)

Des deux relations : (1) et (2) on écrit : $\lambda = K = 6.10^{-7}\ m \Leftrightarrow \lambda = 0,6\ \mu m$

4-2-Détermination de a_1:

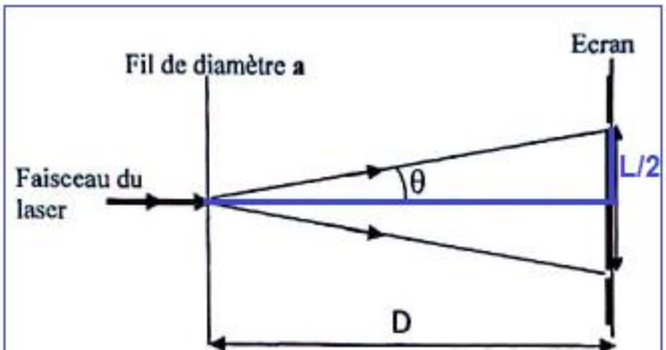


Figure 1

D'après la figure 1, on a : $\tan\theta = \frac{L/2}{D} = \frac{L}{2D}$,

l'angle α est petit : $\tan\theta \simeq \theta \implies \theta = \frac{L}{2D}$

$$\begin{cases} \theta = \dfrac{\lambda}{a_1} \\ \theta = \dfrac{L_1}{2D} \end{cases} \implies \frac{L_1}{2D} = \frac{\lambda}{a_1} \Leftrightarrow a_1 = \frac{2\lambda D}{L_1}$$

$$a_1 = \frac{2 \times 6.10^{-7} \times 2{,}0}{4.10^{-2}} = 6.10^{-5}\ \text{m}$$

$$a_1 = 60\ \mu\text{m}$$

Exercice 3 : Transformations nucléaires (1,5 points)

1-L'équation de la réaction nucléaire :

$$^{235}_{92}\text{U} + ^{1}_{0}\text{n} \longrightarrow ^{146}_{58}\text{Ce} + ^{85}_{34}\text{Se} + x^{1}_{0}\text{n}$$

Loi de conservation du nombre de nucléons :

$$235 + 1 = 146 + 85 + x \implies x = 236 - 231 = 5$$

L'équation de la réaction nucléaire s'écrit :

$$^{235}_{92}\text{U} + ^{1}_{0}\text{n} \longrightarrow ^{146}_{58}\text{Ce} + ^{85}_{34}\text{Se} + 5^{1}_{0}\text{n}$$

2-L'énergie $|\Delta E|$ produite de la fission d'un noyau d'uranium 235 :

$$|\Delta E| = |[m(^{146}_{58}\text{Ce}) + m(^{85}_{34}\text{Se}) + 5m(^{1}_{0}\text{n}) - m(^{235}_{92}\text{U}) - m(^{1}_{0}\text{n})].c^2|$$

$$|\Delta E| = [m(^{235}_{92}\text{U}) - m(^{146}_{58}\text{Ce}) - m(^{85}_{34}\text{Se}) - 4m(^{1}_{0}\text{n})].c^2$$

$$|\Delta E| = [234{,}9935 - 145{,}8782 - 84{,}9033 - 4 \times 1{,}0087]u.c^2 = 0{,}1772 \times 931{,}5\text{MeV}.c^{-2}.c^2 = 165{,}0618\ \text{MeV}$$

$$|\Delta E| = 165{,}0618 \times 1{,}6022.10^{-13}\text{J} \Rightarrow |\Delta E| = 2{,}645.10^{-11}\ \text{J}$$

3-L'énergie E produite par 1kg d'uranium activée à 5 % :

Soit m'a masse d'uranium activée dans 1kg d'uranium 235 :

$$m' = \frac{5}{100} \times 1\text{kg} = 0{,}05\ \text{kg}$$

Soit N le nombre de noyaux qui se trouve dans m' d'uranium activée :

$$N = \frac{m'}{m(^{235}_{92}\text{U})} \implies N = \frac{0{,}05}{234{,}9935 \times 1{,}6605.10^{-27}} = 1{,}28137.10^{23}$$

L'énergie E produite de la fission de N noyau d'uranium 235 activé :

$$E = N.|\Delta E| \implies E = 1{,}28137.10^{23} \times 2{,}645.10^{-11} \implies E = 3{,}389.10^{12}\ \text{J}$$

4- La masse d'uranium 235 activée en un an :

L'expression de la puissance : $p = \frac{E_e}{\Delta t} \Longrightarrow E_e = p.\Delta t$

Le rendement est le rapport de E_e l'énergie électrique et E_T l'énergie nucléaire :

$$r = \frac{E_e}{E_T} \Longrightarrow E_T = \frac{E_e}{r} \Longrightarrow E_T = \frac{p.\Delta t}{r}$$

D'après la question 3 la fission de m′ d'uranium activée 235 produit l'énergie : $E = 3{,}389.10^{12}\ J$

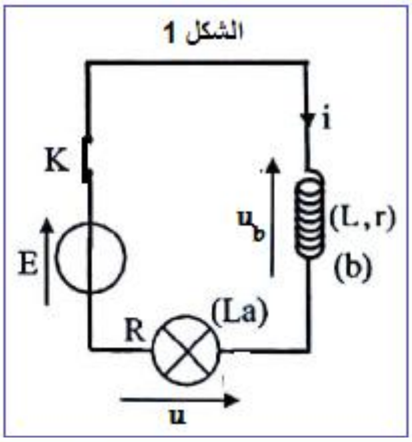
La fission de masse m d'uranium activée produit l'énergie $E_T = \frac{p.\Delta t}{r}$ tel que :

$$m = \frac{p.\Delta t}{E.r} \Longrightarrow m = \frac{1450.10^6 \times 365{,}25 \times 24 \times 3600}{0{,}34 \times 3{,}388.10^{15}} \Leftrightarrow m = 3{,}97.10^4\ kg$$

Exercice 4 : Electricité (5 points)

1- Eveil lumière

1-1- L'équation différentielle :



Loi d'additivité des tensions :

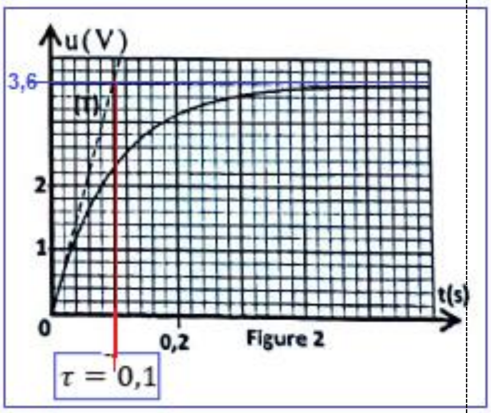
$$u_b + u = E \Leftrightarrow L.\frac{di}{dt} + r.i + u = E$$

$$u = R.i \Longrightarrow i = \frac{u}{R} \Longrightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{du}{dt}$$

$$L.\frac{1}{R}\frac{du}{dt} + r.\frac{u}{R} + u = E \Leftrightarrow \frac{L}{R}.\frac{du}{dt} + u.\frac{R+r}{R} = E$$

$$\frac{du}{dt} + u.\frac{R+r}{L} = \frac{R.E}{L}$$

1-2-Vérification de r et L :



En régime permanent on a : $u = u_{max} = cte \Longrightarrow \frac{du}{dt} = 0$

L'équation différentielle s'écrit :

$$u_{max}.\frac{R+r}{L} = \frac{R.E}{L}$$

$$u_{max}.R + r.u_{max} = R.E$$

$$r.u_{max} = R(E - u_{max}) \Longrightarrow r = \frac{R(E - u_{max})}{u_{max}}$$

D'après la figure 2, en régime permanent on trouve : $u_{max} = 3{,}6\ V$

A.N : $r = \frac{4\times(9-3{,}6)}{3{,}6} \Leftrightarrow r = 6\Omega$

On a : $\tau = \frac{L}{R+r} \Leftrightarrow L = \tau(R + r)$ A. N: $L = 0{,}1 \times (4 + 6) \Leftrightarrow L = 1H$

1-3-1- Montrons la relation $u(t) = 0{,}99\, u_{max}$:

On a l'expression de la puissance électrique est : $p = 98{,}01\ \%\ p_{max} = 0{,}9801\ p_{max}$

$$p_{max} = \frac{u_{max}^2}{R} \quad \text{و} \quad p = \frac{u^2}{R}$$

$$\frac{u^2}{R} = 0{,}9801 \frac{u_{max}^2}{R} \Leftrightarrow u = \sqrt{0{,}9801}\, u_{max} \Leftrightarrow u(t) = 0{,}99\, u_{max}$$

1-3-2- La durée t_R :

La solution de l'équation différentielle s'écrit : $u(t) = u_{max}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ à l'instant t_R , on a :

$$u(t) = 0{,}99\, u_{max} \quad \text{مع} \quad u(t_R) = u_{max}\left(1 - e^{-\frac{t_R}{\tau}}\right)$$

$$0{,}99\, u_{max} = u_{max}\left(1 - e^{-\frac{t_R}{\tau}}\right) \Leftrightarrow 0{,}99 = 1 - e^{-\frac{t_R}{\tau}} \Leftrightarrow e^{-\frac{t_R}{\tau}} = 1 - 0{,}99$$

$$-\frac{t_R}{\tau} = \ln(0{,}01) \Leftrightarrow t_R = -\tau. \ln(0{,}01)$$

$$t_R = -0{,}1 \times \ln(0{,}01) \Leftrightarrow t_R = 0{,}46\ s$$

1-3-3- Proposition de modification apportée au circuit :

D'après l'expression : $t_R = -\tau. \ln(0{,}01)$ pour prolonger la valeur de t_R il faut augmenter la valeur de τ

D'après l'expression $\tau = \frac{L}{R+r}$ il faut diminuer la valeur de R c.à.d remplacer la lampe par une autre ayant la résistance inférieur à R

2- Etude du circuit LC

2-1-La valeur de k :

D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_b + u_C = u_g \quad \Rightarrow L.\frac{di}{dt} + r. i + u_C = k. i$$

$$L.\frac{di}{dt} + (r - k). i + u_C = 0$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du_C}{dt} \quad et \quad \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{di}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(C.\frac{du_C}{dt}\right) = C.\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} + (r - k)C.\frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{r-k}{L}.\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{L.C}.u_C = 0$$

Pour avoir un circuit LC (oscillations sinusoïdales) il faut que : $\frac{r-k}{L} = 0 \Rightarrow r - k = 0$

$$r = k = 6\ \Omega$$

Détermination de I_m :

D'après la figure 4 la valeur de $E_{m_{max}}$ l'énergie magnétique maximale : $E_{m_{max}} = 2\ \mu J$

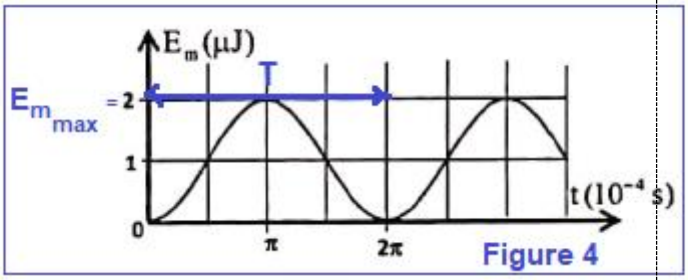


Figure 4

$$E_T = E_m + E_e = E_{m_{max}} \Longrightarrow E_{m_{max}} = \frac{1}{2}L.I_m^2 \Leftrightarrow I_m^2$$

$$= \frac{2.E_{m_{max}}}{L} \Longrightarrow I_m = \sqrt{\frac{2.E_{m_{max}}}{L}}$$

$$I_m = \sqrt{\frac{2.\times 2.10^{-6}}{1}} = 2.10^{-3}\ A \Leftrightarrow I_m = 2\ mA$$

-Détermination de C :

La période T de l'énergie magnétique (figure 4) $T = 2\pi.10^{-4}\ s$

On a : $T_0 = 2T$ avec $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$

$$T_0^2 = 4\pi^2 L.C \Longrightarrow C = \frac{T_0^2}{4\pi^2 L} = \frac{(2T)^2}{4\pi^2.L} = \frac{T^2}{\pi^2.L} \Longrightarrow C = \frac{(2\pi.10^{-4})^2}{\pi^2 \times 1} = 4.10^{-8}\ F \Longrightarrow C = 40\ nF$$

-Détermination de Q_0 :

$$E_T = E_m + E_e = E_{m_{max}} = E_{e_{max}} = \frac{1}{2C}.Q_0^2$$

$$Q_0^2 = 2C.E_{e_{max}} \Longrightarrow Q_0 = \sqrt{2C.E_{e_{max}}} \Longrightarrow Q_0 = \sqrt{2\times 4.10^{-8} \times 2.10^{-6}} = 4.10^{-7}\ C$$

$$Q_0 = 0{,}4\ \mu C$$

3-Oscillateur RLC en régime forcé

3-1- La résistance correspondante à la courbe (b) :

Plus que la résistance R du circuit est petite plus que la résonance est aigue.

On a $R_1 < R_2$ donc la résistance R_1 correspond à la courbe (b).

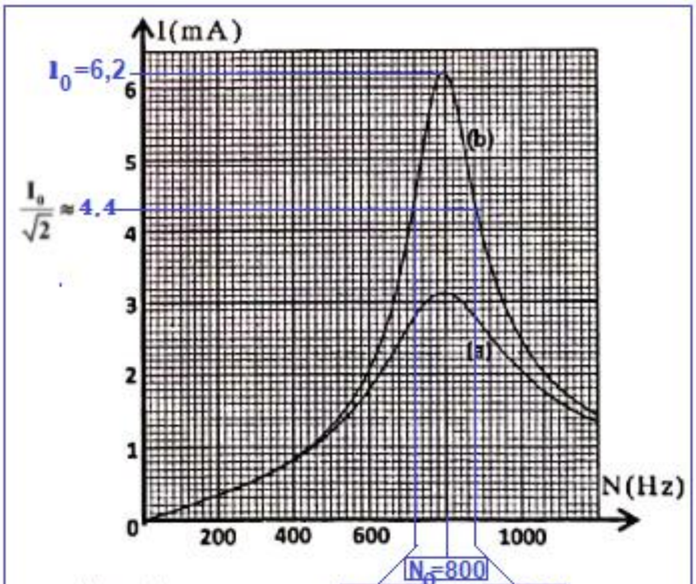


Figure 5

3-2-La fréquence à la résonance :

$$N_0 = 800\ Hz$$

3-3-la largeur de la bande passante :

C'est l'intervalle de fréquence $[N_1, N_2]$ tel que : $I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$, I_0 l'intensité maximale efficace à la résonance $I_0 = 6{,}2\ mA$.

$$\frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{6{,}2}{\sqrt{2}} = 4{,}38\ mA \approx 4{,}4\ mA$$

Graphiquement on trouve : $N_1 = 720\ Hz$ et $N_2 = 880\ Hz$

La largeur de la bande passante : $\Delta N = N_2 - N_1 = 880 - 720 \Leftrightarrow \Delta N = 160\ Hz$

-Déduction du facteur de qualité :

$$Q = \frac{N_0}{\Delta N} = \frac{N_0}{N_2 - N_1} = \frac{800}{880 - 720} \Longrightarrow Q = 5$$

3-4- La valeur de R_1:

$$\Delta N = \frac{R}{2\pi L} \quad \Longrightarrow R = 2\pi L.\Delta N$$

$$R = R_1 + r \Longrightarrow R_1 = R - r \Longrightarrow R_1 = 2\pi L.\Delta N \Longrightarrow R_1 = 2\pi \times 1 \times 160 - 6 = 999{,}3\ \Omega \approx 1000\Omega$$

2éme méthode :

$$Q = \frac{L.\omega_0}{R} \quad \Longrightarrow R_1 + r = \frac{2\pi.L.N_0}{Q} \quad \Leftrightarrow R_1 = \frac{2\pi.L.N_0}{Q} - r$$

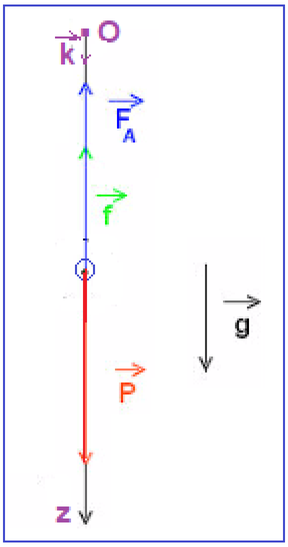
$$R_1 = \frac{2\pi \times 1 \times 800}{5} - 6 = 999{,}3\ \Omega$$

Exercice 5 : Mécaniques (4,5 points)

Partie I : Expérience de Millikan

1-Clacil du rayon de la gouttelette d'huile

1-1-L'équation différentielle :



Système étudié :{La gouttelette (S)}

Bilan des forces :

$\vec{P}$: son poids tel que $\vec{P} = m.\vec{g}$

$\vec{f}$: la force de frottement fluide tel que $\vec{f} = -6\pi\eta r.\vec{V}$

$\vec{F}_A$: la poussée d'Archimède, $\vec{F}_A = -\rho_A V_s.\vec{g} = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_A.\vec{g}$

Application de la deuxième loi de Newton dans le repère $(O, \vec{k})$ lié à un référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G \quad \Leftrightarrow \quad \vec{P} + \vec{f} + \vec{F}_A = m.\vec{a} \quad \Leftrightarrow m.\vec{g} - 6\pi\eta r.\vec{V} - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_A.\vec{g} = m.\vec{a}$$

Projection sur l'axe Oz :

$$m.g - 6\pi\eta r.V - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_A.g = m.a \quad \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} + \frac{6\pi\eta r}{m}.V = g\left(1 - \frac{4\pi r^3 \rho_A}{3m}\right)$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{6\pi\eta r}{\frac{4}{3}\pi r^3.\rho_H}.V = g\left(1 - \frac{4\pi r^3 \rho_A}{\frac{4}{3} \times 3\pi r^3.\rho_H}\right) \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho_H.r^2}.V = g\left(1 - \frac{\rho_A}{\rho_H}\right)$$

1-2-L'expression de la vitesse limite :

Quand la gouttelette arrive à la vitesse limite, on a : $V = V_\ell =$ cte $\Longrightarrow \frac{dV}{dt} = 0$ l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{9\eta}{2\rho_H . r^2} . V_\ell = g\left(1 - \frac{\rho_A}{\rho_H}\right) \Leftrightarrow V_\ell = \frac{2\rho_H g . r^2}{9\eta} . \left(1 - \frac{\rho_A}{\rho_H}\right) \Leftrightarrow V_\ell = \frac{2g . r^2}{9\eta} . (\rho_H - \rho_A)$$

1-3-Vérification du rayon r :

$$V_\ell = \frac{2g . r^2}{9\eta} . (\rho_H - \rho_A) \Leftrightarrow r^2 = \frac{9\eta . V_\ell}{2g(\rho_H - \rho_A)} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{9\eta . V_\ell}{2g(\rho_H - \rho_A)}}$$

$$r = \sqrt{\frac{9 \times 1{,}8.10^{-5} \times 2{,}010^{-4}}{2 \times 9{,}81 \times (1{,}3.10^2 - 1{,}3)}} = 3{,}58.10^{-6}\ \mathrm{m} \Leftrightarrow r \simeq 3{,}6\ \mu\mathrm{m}$$

2-Calcul de la charge de la gouttelette :

2-1-L'expression de la charge q :

Système étudié :{La gouttelette (S)}

Bilan des forces :

$\vec{P}$: son poids tel que $\vec{P} = m . \vec{g}$

$\vec{F}_A$: la force d'Archimède, $\vec{F}_A = -\rho_A V_s . \vec{g} = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_A . \vec{g}$

$\vec{F}_e$: la force électrostatique, $\vec{F}_e = q . \vec{E}$

Application de la première loi de Newton dans le repère $(O, \vec{k})$ lié à un référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{o} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{F}_A + \vec{F}_e = \vec{0} \Leftrightarrow m . \vec{g} - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_A . \vec{g} + q . \vec{E} = \vec{0}$$

Projection sur l'axe Oz :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_H . g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_A . g + q\frac{U_0}{d} = 0 \Leftrightarrow q = \frac{4\pi r^3 . d . g}{3U_0}(\rho_A - \rho_H)$$

2-2- Nombre de charges élémentaires portées par la gouttelette :

$$q = -Ne \Leftrightarrow N = -\frac{q}{e} = \Leftrightarrow N = -\frac{\frac{4\pi r^3 . d . g}{3U_0}(\rho_A - \rho_H)}{e} \Rightarrow N = \frac{4\pi r^3 . d . g}{3e . U_0}(\rho_A - \rho_H)$$

AN: $$N = -\frac{4\pi(3{,}6.10^{-6})^3 \times 2{,}0.10^{-2} \times 9{,}81}{3 \times 1{,}6.10^{-19} \times 3{,}1.10^3} \times (1{,}3 - 1{,}3.10^2) = 9{,}95 \Leftrightarrow N \simeq 10$$

La gouttelette porte la charge : $q = -10\ e$

Partie II : spectrographe de masse :

1-1- Nature du mouvement de l'ion $^{6}Li^{+}$:

L'on $^{6}Li^{+}$ entre les plaques A et C sont soumise à la force électrostatique : $\vec{F} = q.\vec{E} = e.\vec{E}$

On applique la deuxième loi de Newton dans le repère $(O,\vec{i})$ considéré comme galiléen :

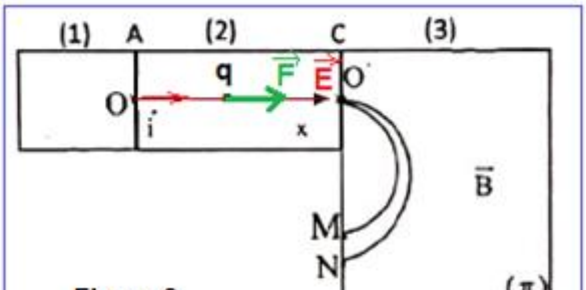


Figure 2

$$\vec{F} = m_1.\vec{a}_1 \Leftrightarrow m_1.\vec{a}_1 = e.\vec{E} \Leftrightarrow \vec{a}_1 = \frac{e}{m_1}.\vec{E}$$

Projection sur l'axe Ox :

$$a_1 = \frac{e}{m_1}.E = \frac{e}{m_1}.\frac{U_0}{d} = \frac{e.U_0}{m_1.d}$$

L'accélération est constante $a_1 = cte$, le mouvement de l'ion $^{6}Li^{+}$ rectiligne uniformément varié (accéléré).

1-2- L'équation horaire du mouvement :

-L'équation horaire du mouvement rectiligne uniformément accéléré : $x(t) = \frac{1}{2}a_1.t^2 + V_0\,t + x_0$

A t=0 on a : $V_0 = 0$ et $x_0 = 0$

$$x(t) = \frac{1}{2}a_1.t^2 \Leftrightarrow x(t) = \frac{e.U_0}{2m_1.d}.t^2 \quad (1)$$

-Déduction de l'équation de V_1 :

$$V_1\,(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{2e.U_0}{2m_1.d}.t \Leftrightarrow V_1\,(t) = \frac{e.U_0}{m_1.d}.t \quad (2)$$

1-3- L'expression de V_1:

On élimine le temps des deux équations horaires (1) et (2) :

$$V_1 = \frac{e.U_0}{m_1.d}.t \Leftrightarrow t = \frac{V_1.m_1.d}{e.U_0}$$

$$x = \frac{e.U_0}{2m_1.d}.\left(\frac{V.m_1.d}{e.U_0}\right)^2 = \frac{m_1.d}{2e.U_0}.V_1^{\,2}$$

$$V_1^{\,2} = \frac{2eU_0}{m_1.d}.x \Leftrightarrow V_1 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_1.d}.x}$$

On a : $x = d$:
$$V_1 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_1}}$$

2-Expression de MN en fonction de B , m_1 , m_2 , e , U_0 :

Le mouvement des ions dans le compartiment (3) est circulaire uniforme de rayon :

$$R = \frac{m.V}{e.B} \text{ avec } V = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$$

$$R = \frac{m}{e.B}.\sqrt{\frac{2eU_0}{m}} = \sqrt{\frac{2e.m^2.U_0}{e^2.B^2.m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m.U_0}{e}}$$

On a : $m_1 < m_2$ donc $R_1 < R_2$ avec : $R_1 = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2m_1.U_0}{e}}$ et $R_2 = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2m_2.U_0}{e}}$

$$MN = D_2 - D_1 = 2R_2 - 2R_1 = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2m_2.U_0}{e}} - \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2m_1.U_0}{e}} = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2.U_0}{e}}\left(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}\right)$$

$$MN = \frac{2}{0{,}1} \times \sqrt{\frac{2 \times 2.10^3}{1{,}6.10^{-19}}}\left(\sqrt{7 \times 1{,}67.10^{-27}} - \sqrt{6 \times 1{,}67.10^{-27}}\right) = 2{,}54.10^{-2}\text{m}$$

$$MN = 2{,}54 \text{ cm}$$