

LA DERIVATION

Exercice1 :

1- Montrer en utilisant la définition que la fonction $f(x) = x^2 + x - 3$ est dérivable en $a = -2$.

2) soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \dots x \geq 1 \\ f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} \dots x < 1 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

3) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + x; x < 0 \\ f(x) = -2x^2 + 3x; x \geq 0 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$

Solution :

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 3 + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} x - 1 = -3 = f'(-2) \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en -2 et $f'(-2) = -3$

on a $f(1) = \sqrt{1} = 1$

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x})^2 - 1^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} = f'_d(1) \end{aligned}$$

Donc f est dérivable à droite en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{4}(x+1) = \frac{1}{2} = f'_g(1)$$

Donc f est dérivable à gauche en 1

et on a : $f'_d(1) = f'_g(1)$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x + 3 = 3 = f'_d(0)$$

3 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à droite de 0

On dit que f est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 1 = 1 = f'_g(0)$$

1 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à gauche de 0

On dit que f est dérivable à gauche en 0

Mais on a : $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

Donc : f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2: soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} \dots 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^3 - x} \dots x > 1 \end{cases}$$

1) déterminer le domaine de définition de f

2) étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$ et

donner une interprétation géométrique du résultat

3) étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche

en $x_0 = 1$ et donner une interprétation

géométrique

Solution :1) $x \in D_f \Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0$ et $0 \leq x \leq 1$

ou $x^3 - x \geq 0$ et $x > 1$

$x \in D_f \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ ou $x > 1$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in [0; +\infty[$ donc : $D_f = [0; +\infty[$

2) étude de la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$

On a : $f(0) = 1$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{(1+x)\sqrt{1-x^2} - 1}{x} = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} - 1}{x} \\ &= \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{x(\sqrt{1-x^2} + 1)} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 = f'_d(0)$$

Donc f est dérivable à droite en 0

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent en

$A(0, 1)$. de coefficient directeur $1 = f'_d(0)$

3)a)étudie de la dérivabilité de f à gauche en

$x_0 = 1$ On a : $f(1) = 0$ soit $0 \leq x \leq 1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{(1+x)\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \frac{(1+x)(1-x^2)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et puisque : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} -(1+x)^2 = -4$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $x_0 = 1$

b)soit $x > 1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^3-x}-0}{x-1} = \frac{x(x+1)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^3-x}} = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}}$$

Et puisque : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^3-x} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2+x = 2$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}} = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent en $A(1,0)$ parallèle à l'axe des ordonnées dirigé vers le haut

Exercice3 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

1)étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

2)étudier la dérivabilité de f à gauche en

$x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

3)étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

4)donner l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0 = 1$

4)donner l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0 = 1$

Solution :1) $f(x) = |x^2 - 1|$

étude du signe de : $x^2 - 1$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

Donc : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1; x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\\ f(x) = -(x^2 - 1); x \in [-1; 1] \end{cases}$ et

$$f(1) = |1^2 - 1| = 0$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x^2-1	$+$	0	$-$	0

1)étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x+1 = 2$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = 1$ et $f'_d(1) = 2$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent à droite en $A(1, 0)$.de coefficient directeur $f'_d(1) = 2$

2)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2-1)-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = 1$ et $f'_g(1) = -2$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent à gauche en $A(1, 0)$.de coefficient directeur $f'_g(1) = -2$

3) f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$ car : $f'_d(1) \neq f'_g(1)$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe admet un point anguleux en $A(1, 0)$.

4) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0 = 1$ est :

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x-x_0)$$

5) l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0 = 1$ est :

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x-x_0)$$

$$y = f(1) + f'_g(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 0 - 2(x-1) \Leftrightarrow (\Delta_g): y = -2x + 2$$

Exercice4 : Calculer le nombre dérivé de

$f(x) = x^3 + x$ en $a = 1$ en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

$$\text{Solution : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 + 1 + h - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 3h + 1 + 1 + h - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 + 3h + 4 = 4 = f'(1)$$

Exercice5 : donner une approximation de $\sin 3$

Solution : Si on veut une approximation de $\sin 3$, on peut prendre : $f(x) = \sin x$ et $a = \pi$ (car π est

l'élément le plus proche de 3 dont le sinus est connu $h = 3 - \pi$ (pour avoir $\sin 3 = \sin(\pi + h)$)

On a alors $f(a) = \sin \pi = 0$ et $f'(a) = \cos \pi = -1$ (à prouver) ce qui donne :

$$\sin 3 = \sin(\pi + h) \sim -1 \times (3 - \pi) = \pi - 3.$$

Exercice 6 : Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée dans les cas suivants :

- 1) $f(x) = x^2 + 3x - 1$ 2) $f(x) = 4 \sin x$
 3) $f(x) = x^4 \cos x$ 4) $f(x) = \sqrt{x} + x^3$
 5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 6) $f(x) = \frac{6}{4x^2 + 3x - 1}$
 7) $f(x) = \frac{4x - 3}{2x - 1}$ 8) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
 9) $f(x) = (2x + 3)^5$

Solution : 1) $f(x) = x^2 + 3x - 1$ $D_f = \mathbb{R}$
 f est une fonction polynôme donc dérivable sur \mathbb{R}

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (x^2)' + (3x - 1)' = 2x + 3$$

2) $f(x) = 4 \sin x$ $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = 4u(x) \text{ avec } u(x) = \sin x$$

Puisque u est dérivable sur \mathbb{R} alors f est une fonction dérivable sur \mathbb{R}

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 4(u(x))' = 4 \cos x$$

3) $f(x) = x^4 \cos x$ $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = u(x) \times v(x) \text{ avec } u(x) = x^4 \text{ et } v(x) = \cos x$$

Puisque u et v sont dérivables sur \mathbb{R} alors f est une fonction dérivable sur \mathbb{R}

On utilise la formule : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = ((x^4) \times (\cos x))' = (x^4)' \times (\cos x) + (x^4) \times (\cos x)'$$

$$f'(x) = 4x^3 \times (\cos x) - x^4 \times \sin x = 4x^3 \cos x - x^4 \sin x$$

4) $f(x) = \sqrt{x} + x^3$ $D_f = \mathbb{R}^+ =]0; +\infty[$

$$f(x) = u(x) + v(x) \text{ avec } u(x) = \sqrt{x} \text{ et } v(x) = x^3$$

Puisque u est dérivables sur \mathbb{R}_+^* et v est dérivables en particulier sur \mathbb{R}_+^* alors f est une fonction dérivable sur \mathbb{R}_+^*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = (u(x))' + (v(x))' = \frac{2}{2\sqrt{x}} + 3x^2$$

5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $D_f = \mathbb{R}^{**} =]0; +\infty[$

On a : $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = \sqrt{x}$

Puisque u est dérivables sur \mathbb{R}_+^*

Donc f est dérivables sur \mathbb{R}_+^*

On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

6) $f(x) = \frac{6}{4x^2 + 3x - 1}$ $D_f = \mathbb{R} - \left\{-1; \frac{1}{4}\right\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f = \mathbb{R} - \left\{-1; \frac{1}{4}\right\}$

est on a : $f(x) = \frac{6}{u(x)}$ avec $u(x) = 4x^2 + 3x - 1$

$$f'(x) = 6 \left(\frac{1}{u(x)}\right)' = 6 \left(-\frac{u'}{u^2}\right) = -6 \frac{(4x^2 + 3x - 1)'}{(4x^2 + 3x - 1)^2} = -6 \frac{8x + 3}{(4x^2 + 3x - 1)^2}$$

7) $f(x) = \frac{4x - 3}{2x - 1}$ $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$$f(x) = u(x)/v(x) \text{ avec } u(x) = 4x - 3 \text{ et } v(x) = 2x - 1$$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{4x - 3}{2x - 1}\right)' = \frac{(4x - 3)'(2x - 1) - (4x - 3)(2x - 1)'}{(2x - 1)^2} = \frac{4(2x - 1) - 2 \times (4x - 3)}{(2x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(2x - 1) - 2 \times (4x - 3)}{(2x - 1)^2} = \frac{8x - 4 - 8x + 6}{(2x - 1)^2} = \frac{2}{(2x - 1)^2}$$

8) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$: $D_f =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

On a : $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 - 4$

Et on a : $u(x) > 0 \quad \forall x \in D_f - \{-2; 2\}$

Donc f est dérivables sur $D_f - \{-2; 2\}$

$\forall x \in D_f - \{-2; 2\} :$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 - 4})' = \frac{(x^2 - 4)'}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

9) $f(x) = (2x+3)^5 \quad D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = (u(x))^5$ avec $u(x) = 2x+3$

On utilise la formule : $(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$

$$f'(x) = ((2x+3)^5)' = 5 \times (2x+3)^{5-1} \times (2x+3)' = 5 \times 2 \times (2x+3)^4 = 10(2x+3)^4$$

Exercice7 : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sin(2x^2 - 1)$

2) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2 + 2}\right)$

3) $f(x) = \tan \cos(x)$

Exercice8: Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$f(x) = \cos x$

1) montrer que f est une bijection de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$

2) calculer : $(f^{-1})'(0)$

Solutions :1) f est continue

Et : $f(x) = -\sin x \leq 0$ sur $[0, \pi]$ donc f strictement

décroissante sur $[0, \pi]$ donc f est une bijection de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$ et on a : $f(\pi/2) = 0$

et $f'(\pi/2) = \cos'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1 \neq 0$

alors f^{-1} est dérivable en 0

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{-1} = -1$$

Exercice9 : soit f une fonction définie par :

$f(x) = x^3 + x^2$

1- Dresser le tableau de variation de f

2- Montrer que f est une bijection de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R}^+ et calculer $f(1)$.

3- Déterminer $(f^{-1})'(2)$

Exercice10 : Soit la fonction $g(x) = \cos(2x)$

1- Dresser le tableau de variation de g dans $[0, \pi]$

2- Montrer que g est une bijection de $]0, \pi/2[$ Vers $] - 1, 1[$.

3- Vérifier que $(\forall y \in]0, \pi/2[)$ ($g'(y) \neq 0$) et déterminer $(g^{-1})'(x)$ pour x dans $] - 1, 1[$.

Solutions : 1) g est dérivable sur \mathbb{R} et $(\forall x \in \mathbb{R})(g'(x) = -2\sin(2x))$

□ Si $x \in [0, \pi/2]$ alors $2x \in [0, \pi]$ et par suite : $g'(x) = -2 \sin(2x) \leq 0$

□ Si $x \in [\pi/2, \pi]$ alors $2x \in [\pi, 2\pi]$ et par suite $g'(x) = -2 \sin(2x) \geq 0$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$g'(x)$	0	-	0
$g(x)$	1	-1	1

2- La fonction g est continue (composition de deux fonctions continues) strictement décroissante de $]0, \pi/2[$ vers $g(]0, \pi/2[)$

$$g(]0, \pi/2[) =] \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)[=] - 1, 1[$$

Donc g est une bijection de $]0, \pi/2[$ vers $] - 1, 1[$; soit g^{-1} sa fonction réciproque.

3- On a : g est dérivable sur $]0, \pi/2 [$ et $(\forall x \in]0, \pi/2[)$ ($g'(x) = -2 \sin(2x) \neq 0$)

donc g^{-1} est dérivable sur $] - 1, 1[$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in] - 1, 1[; (g^{-1})'(x) &= \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{-2 \sin(2g^{-1}(x))} = \frac{1}{-2\sqrt{1 - \cos^2(2g^{-1}(x))}} \\ &= \frac{1}{-2\sqrt{1 - (g(g^{-1}(x))))^2}} = \frac{1}{-2\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

Pour x dans $] - 1, 1[$, $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{-2\sqrt{1 - x^2}}$

Exercice 11 : Déterminer les domaines de dérivabilité et les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + x - 4}$

2) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{2x-1}{x^2-x}}$

Exercice12 : résoudre dans \mathbb{R} les équations

suivantes : $(E_1) : \sqrt[3]{3+x} - \sqrt[3]{3-x} = \sqrt[6]{9-x^2}$

$(E_2) : 2x\sqrt{x} - 3x^4\sqrt{\frac{1}{x}} = 20$

Correction :1) (E_1): $\sqrt[3]{3+x} - \sqrt[3]{3-x} = \sqrt[6]{9-x^2}$

Le domaine de définition de l'équation (E_1)

Est : $D_{(E_1)} = [-3; 3]$

On a :

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

$(E_1) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{3+x} - \sqrt[3]{3-x})^3 = (\sqrt[6]{9-x^2})^3$

$\Leftrightarrow (3+x) - (3-x) - 3\sqrt[3]{9-x^2}\sqrt[3]{9-x^2} = \sqrt{9-x^2}$

On a :

$\sqrt[3]{9-x^2}\sqrt[3]{9-x^2} = \sqrt[6]{(9-x^2)^2}\sqrt[3]{9-x^2} = \sqrt[6]{(9-x^2)^3} = \sqrt{9-x^2}$

Donc : $(E_1) \Leftrightarrow 2x - 3\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-x^2}$

$(E_1) \Leftrightarrow x = 2\sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4(9-x^2) \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

Donc : $S = \left\{ \frac{6\sqrt{5}}{5} \right\}$

2) $2x\sqrt{x} - 3x^4\sqrt{\frac{1}{x}} = 20$

Le domaine de définition de l'équation (E_2)

Est : $D_{(E_2)} =]0; +\infty[$

Soit $x > 0$ on pose : $t = \sqrt[4]{x}$ donc $t > 0$

Et on a : $(E_2) \Leftrightarrow 2t^6 - 3t^3 - 20 = 0 (t^3 = T)$

$(E_2) \Leftrightarrow 2T^2 - 3T - 20 = 0 \quad \Delta = 169$

La solution positive de cette équation est : $T = 4$

Donc : $t^3 = 4 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{4}$ et on a : $t = \sqrt[4]{x}$

Donc :

$x = t^4 \Leftrightarrow x = (\sqrt[3]{4})^4 = (\sqrt[3]{4})^3 \sqrt[3]{4} = 4\sqrt[3]{4}$

Donc : $S = \{4\sqrt[3]{4}\}$

Exercice 13 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x-1}}$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x} - \sqrt[6]{x+1}}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+1}$ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - x$

Solutions : 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x-1}}$ on pose

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x-1}} = L_1$

On a : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Et : $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + a^2b^2 + b^3)$

$L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} \frac{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1}$

$L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \frac{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1} = 2 \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x} - \sqrt[6]{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[12]{x^3} - \sqrt[12]{(x+1)^4}}{\sqrt[12]{x^6} - \sqrt[12]{(x+1)^2}}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[12]{\frac{x^3}{(x+1)^4}} - 1}{1 - \sqrt[12]{\frac{(x+1)^2}{x^6}}}$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[12]{\frac{(x+1)^4}{x^6}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[12]{\frac{x^3}{(x+1)^4}} - 1 = -1$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \sqrt[12]{\frac{(x+1)^2}{x^6}} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x} - \sqrt[6]{x+1}} = 0$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+1}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - \sqrt[3]{x^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} \right)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+1} = +\infty$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - x$

On a : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+x^2})^3 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+x^2} + x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)^2} + x \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 \left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} + 1}$$

$$= \frac{1}{3} \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

Exercice14 : soit f une fonction définie sur

$$I =]-\pi; \pi[\text{ par : } \begin{cases} f(x) = 2 \frac{\cos x - 1}{\sin x}; \text{ si } \dots 0 < x < \pi \\ f(x) = \frac{x|x+1|}{x-1}; \text{ si } \dots -\pi < x \leq 0 \end{cases}$$

1) monter que f est dérivable en $x_0 = 0$
et donner l'équation de la tangente a la courbe de f en $x_0 = 0$

2) a) étudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$

b) donner les équations des demies tangentes à a la courbe de f en en $x_0 = -1$

Solution : 1) étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{\cos x - 1}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2 \times \frac{1}{2} \times 1 = -1 = f'_d(0)$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = 0$ et $f'_d(0) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x+1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x-1} = -1 = f'_g(0)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = 0$ et

$$f'_g(0) = -1$$

Et puisque : $f'_d(0) = f'_g(0)$

Donc f est dérivable à en $x_0 = 0$ et $f'(0) = -1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet une tangente en $O(0, 0)$. de coefficient directeur $f'(0) = -1$

l'équation de la tangente a la courbe de f en

$$x_0 = 0 \text{ est : } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

$$y = 0 - 1(x - 0) \Leftrightarrow (T) : y = -x$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x - 1} = \frac{1}{2} = f'_d(-1)$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = -1$ et $f'_d(-1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x}{x - 1} = -\frac{1}{2} = f'_g(-1)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = -1$ et

$$f'_g(-1) = -\frac{1}{2} \text{ mais on a : } f'_d(-1) \neq f'_g(-1)$$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = -1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe admet un point anguleux en $A(-1, 0)$.

b) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0 = -1$ est :

$$y = f(-1) + f'_d(-1)(x + 1) \text{ avec } x \geq -1$$

$$y = 0 + \frac{1}{2}(x + 1) \Leftrightarrow (T_d) : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ avec } x \geq -1$$

l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0 = -1$ est :

$$y = f(-1) + f'_g(-1)(x + 1) \text{ avec } x \leq -1$$

$$y = 0 - \frac{1}{2}(x + 1) \Leftrightarrow (T_g) : y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{ avec } x \leq -1$$

Exercice15 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{3x - 2} \left(\frac{2x + 1}{x - 1} \right)^3$$

1) déterminer le domaine de définition D_f de f

2) déterminer le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée

Solution : 1) $x \in D_f \Leftrightarrow 3x - 2 \geq 0$ et $x - 1 \neq 0$

$$\text{Donc : } D_f = \left[\frac{2}{3}; 1[\cup]1; +\infty[$$

2) on a $f(x) = g(3x - 2) \times h(x)$

$$\text{Avec : } h(x) = \left(\frac{2x + 1}{x - 1} \right)^3 \text{ et } g(x) = \sqrt{x}$$

On sait que : g est dérivable sur \mathbb{R}_*^+ et la fonction polynôme $D_f \ x \rightarrow 3x - 2$ est dérivable sur D_f

$3x-2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$ donc la fonction $x \rightarrow g(3x-2)$

est dérivable sur $D_f - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

donc : f est dérivable sur $D_f - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ cad $D_{f'} = D_f - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

$\forall x \in D_{f'} :$

$$f'(x) = (g(3x-2))' \times h(x) + g(3x-2) \times (h(x))'$$

$$(g(3x-2))' = (3x-2)' \times g'(3x-2) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x-2}}$$

$$\text{Car : } g'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(h(x))' = 3 \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)' \times \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^2$$

$$\left(\frac{2x+1}{x-1} \right)' = \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} \times \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^3 + \sqrt{3x-2} \times \frac{-9}{(x-1)^2} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^2$$

Exercice 16 : en utilisant la dérivée calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^{2018} - 1}{x+1} \quad 2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$$

Solution: 1) on pose : $f(x) = (x+2)^{2018}$ on a : f est dérivable sur \mathbb{R} en particulier en -1 et

$$f(-1) = (-1+2)^{2018} = 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^{2018} - 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1)$$

Et puisque : $f'(x) = 2018(x+2)^{2017} (x+2)' = 2018(x+2)^{2017}$

$$\text{Donc : } f'(-1) = 2018 \times 1^{2017} = 2018$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^{2018} - 1}{x+1} = 2018$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} \text{ on pose } f(x) = 2 \sin x$$

on a : f est dérivable sur \mathbb{R} en particulier en

$$\frac{\pi}{6} \text{ et } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \left(\frac{\pi}{6}\right)} = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Et puisque : $f'(x) = 2 \cos x$

$$\text{Donc : } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{6} = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

