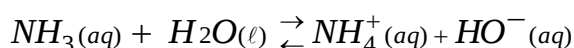


- Chimie -Partie I : Etude d'une solution aqueuse d'ammoniac et de sa réaction avec un acide.**1- Etude d'une solution aqueuse d'ammoniac :**1-1- On prépare une solution aqueuse S_1 d'ammoniac :**1-1-1- Equation chimique modélisant la réaction de l'ammoniac avec l'eau :****1-1-2- * Expression du taux d'avancement final τ_1 de la réaction :**

Equation de la réaction		$NH_3(aq) + H_2O(\ell) \rightleftharpoons NH_4^+(aq) + HO^-(aq)$			
Etat du système	Avancement $x(\text{mol})$	Quantités de matière (mol)			
Etat initial	0	$C_1.V$	en excès	0	0
Etat intermédiaire	x	$C_1.V - x$	en excès	x	x
Etat final	x_f	$C_1.V - x_f$	en excès	x_f	x_f

- Par définition : $\tau_1 = \frac{x_f}{x_m}$

- D'après le tableau d'avancement de la réaction :

$$x_f = [HO^-]V \text{ et } x_m = C_1.V \Rightarrow \tau_1 = \frac{[HO^-]}{C_1}$$

- Le produit ionique de l'eau, et la définition du pH donnent :

$$[H_3O^+][HO^-] = K_e \text{ et } [H_3O^+] = 10^{-pH_1} \Rightarrow [HO^-] = K_e \cdot 10^{pH_1}$$

- En combinant toutes ces relations, on aura :

$$\tau_1 = \frac{K_e \cdot 10^{pH_1}}{C_1}$$

*** Vérification de $\tau_1 \approx 4\%$:**

$$\text{A.N : } \tau_1 = \frac{10^{-14} \times 10^{10,6}}{10^{-2}} \approx 0,04 = 4\%$$

1-1-3- * Expression de la constante d'équilibre K associée à l'équation de la réaction :

$$\text{- Par définition : } K = \frac{[NH_4^+] \times [HO^-]}{[NH_3]}$$

- D'après le tableau d'avancement de la réaction :

$$[HO^-] = [NH_4^+] = \tau_1.C_1 \text{ et } [NH_3] = C_1 - [NH_4^+] = C_1.(1 - \tau_1)$$

Correction du sujet de l'examen national du Baccalauréat
Session normale : 2016

page 2

- La constante K peut s'écrire : $K = \frac{(\tau_1 \cdot C_1)^2}{C_1 \cdot (1 - \tau_1)}$ ou bien $K = \frac{\tau_1^2 \cdot C_1}{1 - \tau_1}$

* Calcul de sa valeur : $K = \frac{0,04^2 \times 10^{-2}}{1 - 0,04} \approx 1,67 \cdot 10^{-5}$

1-2- On dilue la solution S₁, on obtient alors une solution S₂ :

1-2-1- Association de la forme basique du couple NH₄⁺ / NH₃ à la courbe qui lui correspond :

- Le pourcentage de la forme basique est : $\frac{[NH_3]}{[NH_3] + [NH_4^+]} \times 100$

- Pour une solution basique ce pourcentage est grand et est supérieur à 50% ; donc la courbe (2) correspond à la forme basique du couple NH₄⁺/NH₃.

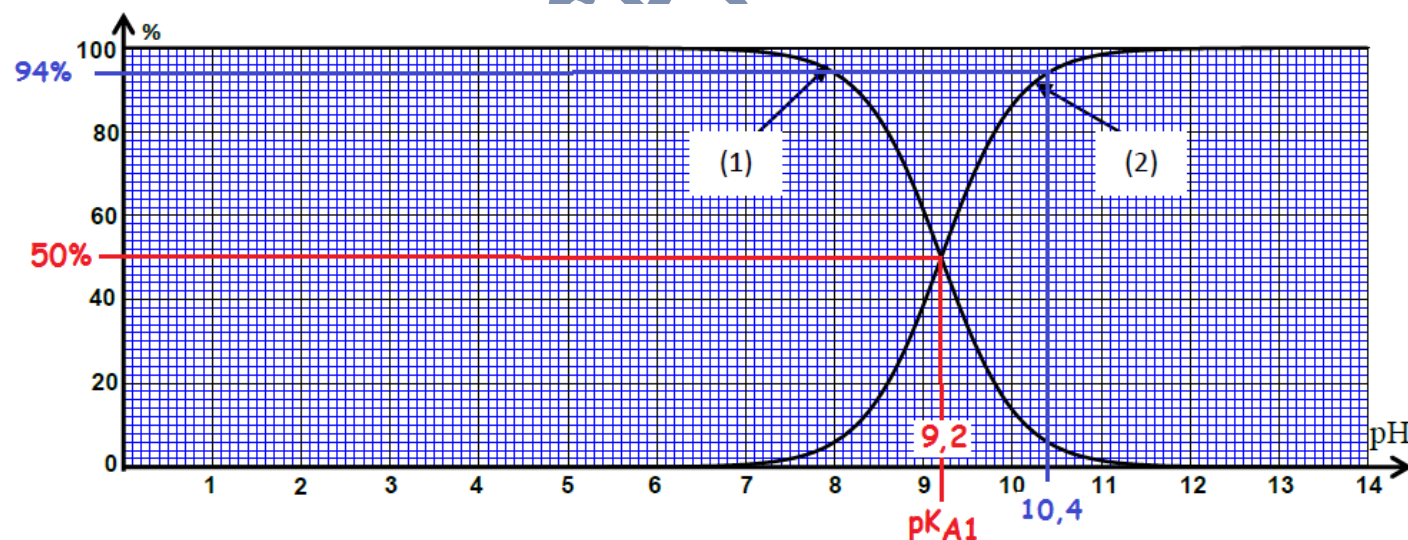
1-2-2- A l'aide des courbes représentées sur la figure :

a- Détermination de pK_{A1} :

- Pour le couple : $pH = pK_{A1} + \text{Log} \frac{[NH_3]}{[NH_4^+]}$

- Lorsque $\frac{[NH_3]}{[NH_3] + [NH_4^+]} \times 100 = \frac{[NH_4^+]}{[NH_3] + [NH_4^+]} \times 100$ alors $[NH_3] = [NH_4^+]$

- On en déduit : $pK_{A1} = pH$



- Graphiquement on trouve : $pK_{A1} \approx 9,2$

b- Détermination du taux d'avancement τ_2 de la réaction dans la solution S₂ :

- Pour la réaction : $K = \frac{\tau_2^2 \cdot C_2}{1 - \tau_2}$ *K ne dépend que de la température*

- On a aussi : $\tau_2 = \frac{K_e \cdot 10^{pH_2}}{C_2}$

- En éliminant C_2 des 2 relations précédentes, on trouve : $\tau_2 = \frac{K}{K + K_e \cdot 10^{pH_2}}$

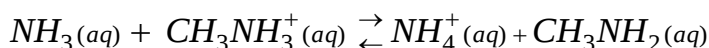
A.N : $\tau_2 = \frac{1,67 \cdot 10^{-5}}{1,67 \cdot 10^{-5} + 10^{-14} \times 10^{10,4}} \approx 0,062 = 6,2\%$

1-2-2- Que peut-on déduire en comparant τ_1 et τ_2 ?

$\tau_2 = 6,2\% > \tau_1 = 4\%$: On déduit que la dilution augmente la dissociation de l'espèce NH_3 .

2- Etude de la réaction de l'ammoniac avec l'ion méthylammonium :

2-1- Equation chimique entre ammoniac et l'ion méthylammonium :



2-2- La constante d'équilibre K' associée à l'équation de cette réaction :

On a $K' = \frac{K_{A2}}{K_{A1}} = \frac{10^{-pK_{A2}}}{10^{-pK_{A1}}} \Rightarrow K' = 10^{(pK_{A1} - pK_{A2})}$

A.N : $K' = 10^{9,2-10,7} \approx 3,2 \cdot 10^{-2}$

2-3- Montrons que : $[CH_3NH_2] = [NH_4^+] = \frac{C}{2} \cdot \frac{\sqrt{K'}}{1 + \sqrt{K'}}$

- D'après le tableau d'avancement de la réaction et à l'équilibre :

$$[CH_3NH_2] = [NH_4^+] = \frac{x_f}{2.V} \quad \text{et} \quad [CH_3NH_3^+] = [NH_3] = \frac{C.V - x_f}{2.V} = \frac{C}{2} - [NH_4^+] \quad (V_{sol} = V + V = 2.V)$$

- Par définition : $K' = \frac{[CH_3NH_2] \times [NH_4^+]}{[CH_3NH_3^+] \times [NH_3]}$

- En combinant toutes ces relations, on aura : $K' = \frac{[NH_4^+]^2}{[NH_3]^2} = \frac{[NH_4^+]^2}{\left(\frac{C}{2} - [NH_4^+]\right)^2}$

Alors $\frac{[NH_4^+]}{\frac{C}{2} - [NH_4^+]} = +\sqrt{K'} \Rightarrow [NH_4^+] = \frac{C}{2} \cdot \sqrt{K'} - [NH_4^+] \sqrt{K'} \Rightarrow [NH_4^+] (1 + \sqrt{K'}) = \frac{C}{2} \cdot \sqrt{K'}$

Finalement : $[CH_3NH_2(aq)] = [NH_4^+(aq)] = \frac{C}{2} \cdot \frac{\sqrt{K'}}{1 + \sqrt{K'}}$

2-4- Le pH du mélange réactionnel à l'équilibre :

- Pour le mélange réactionnel ; la relation suivante est vérifiée : $pH = pK_{A1} + \text{Log} \frac{[NH_3]}{[NH_4^+]}$

- On a les résultats déjà établis :

**Correction du sujet de l'examen national du Baccalauréat
Session normale : 2016**

page 4

$$[NH_4^+] = \frac{C}{2} \cdot \frac{\sqrt{K'}}{1 + \sqrt{K'}} \quad \text{et} \quad [NH_3] = \frac{C}{2} - [NH_4^+] = \frac{C}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{K'}}{1 + \sqrt{K'}} \right) = \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{K'}}$$

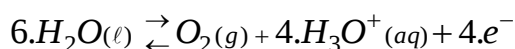
- En remplaçant les 2 expressions ; on trouve :

$$pH = pK_{A1} + \text{Log} \left(\frac{\frac{C}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{K'}}}{\frac{C}{2} \cdot \frac{\sqrt{K'}}{1 + \sqrt{K'}}} \right) \quad \text{ou bien} \quad pH = pK_{A1} - \text{Log}(\sqrt{K'})$$

A.N : $pH = 9,2 - \text{Log}(\sqrt{3,2 \cdot 10^{-2}}) \approx 9,95$

Partie II : Electrolyse d'une solution aqueuse de nitrate d'argent.

1- Equation de la réaction qui se produit à l'anode :



2- Expression de l'avancement x de la réaction à un instant t :

- Dressons le tableau d'avancement :

Equation de la réaction		$6.H_2O(\ell) + 4.Ag^+_{(aq)} \rightarrow O_{2(g)} + 4.H_3O^+_{(aq)} + 4.Ag_{(s)}$					Quantité des e^- échangés :
E.S	Avancement x (mol)	Quantités de matière (mol)					
E. I	0	$n_0(H_2O)$	$n_0(Ag^+)$	0	$n_0(H_3O^+)$	0	0
E. Inter	x	$n_0(H_2O) - 6.x$	$n_0(Ag^+) - 4.x$	x	$n_0(H_3O^+) + 4.x$	4.x	$n(e^-) = 4.x$
E. F	$x_{\max}$	$n_0(H_2O) - 6.x_m$	$n_0(Ag^+) - 4.x_m$	x_m	$n_0(H_3O^+) + 4.x_m$	4.x_m	$n(e^-) = 4.x_m$

- A l'instant t, on peut écrire : $n_t(H_3O^+) = n_0(H_3O^+) + 4.x$ alors $[H_3O^+]_t = [H_3O^+]_0 + 4 \cdot \frac{x}{V}$

- On en déduit ; avec $[H_3O^+]_t = 10^{-pH_t}$ et $[H_3O^+]_0 = 10^{-pH_0}$; que :

$$x = \frac{V}{4} \cdot (10^{-pH_t} - 10^{-pH_0})$$

3- L'instant t_1 où le pH du mélange prend la valeur $pH_1 = 1,5$.

- La quantité d'électricité échangée entre H_2O et Ag^+ pendant $\Delta t = t_1 - t_0 = t_1$

$$Q = I \times \Delta t = n(e^-) \times F \quad \text{ou bien} \quad I \times t_1 = 4.x \times F \quad \text{alors} \quad t_1 = \frac{4.F}{I} \cdot x$$

- Finalement on obtient : $t_1 = \frac{F.V}{I} \cdot (10^{-pH_t} - 10^{-pH_0})$

A.N : $t_1 = \frac{9,65 \cdot 10^4 \times 0,4}{0,266} \cdot (10^{-1,5} - 10^{-3}) \approx 4444 \text{ s} = 1 \text{ h } 14 \text{ min } 4 \text{ s}$

- Physique -Les transformations nucléaires : La radioactivité du polonium1- Equation de la transformation nucléaire :

- L'équation de désintégration est : ${}_{84}^{210}\text{Po} \rightarrow {}_Z^{206}\text{Pb} + {}_2^4\text{He}$
- Conservation de la charge : $84 = Z + 2$ alors $Z = 82$
- L'équation devient : ${}_{84}^{210}\text{Po} \rightarrow {}_{82}^{206}\text{Pb} + {}_2^4\text{He}$

2- Energie ΔE produite lors de la désintégration d'un noyau :

- L'énergie libérée est : $E_{\text{lib}} = |\Delta E| = \left| E_{\ell}({}_{84}^{210}\text{Po}) - E_{\ell}({}_2^4\text{He}) - E_{\ell}({}_{82}^{206}\text{Pb}) \right|$
- A.N : $E_{\text{lib}} = \left| 1,6449 \cdot 10^3 - 28,2989 - 1,6220 \cdot 10^3 \right| \approx 5,4 \text{ MeV}$

3-1- La proposition juste : est d)

En effet ; on applique la relation : $N_D(t = n \times t_{1/2}) = N_0(\text{Po}) - \frac{N_0(\text{Po})}{2^n}$

Ici $n=4$: $N_D(t = 4 \cdot t_{1/2}) = N_0(\text{Po}) - \frac{N_0(\text{Po})}{16} = \frac{15 \cdot N_0(\text{Po})}{16}$

3-2- Détermination en jour de la demi-vie $t_{1/2}$:

- La loi de désintégration : $N(\text{Po}) = N_0(\text{Po}) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ avec $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$
- Cette loi peut s'écrire : $\ln \left(\frac{N_0(\text{Po})}{N(\text{Po})} \right) = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \cdot t$ (1)
- La droite représentant la courbe de la fonction $\ln \left(\frac{N_0(\text{Po})}{N(\text{Po})} \right) = f(t)$ a pour équation :

$$\ln \left(\frac{N_0(\text{Po})}{N(\text{Po})} \right) = K \cdot t \quad (2) :$$

$$K \text{ est le coefficient directeur } K = \frac{\Delta \ln \left(\frac{N_0(\text{Po})}{N(\text{Po})} \right)}{\Delta t} = \frac{(1/4) \cdot \ln 2}{34,5} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ j}^{-1}$$

- Des 2 relations (1) et (2) ; on déduit que : $K = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$ ou bien $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{K}$

$$\text{A.N : } t_{1/2} = \frac{\ln 2}{5 \cdot 10^{-3}} \approx 138,6 \text{ j}$$

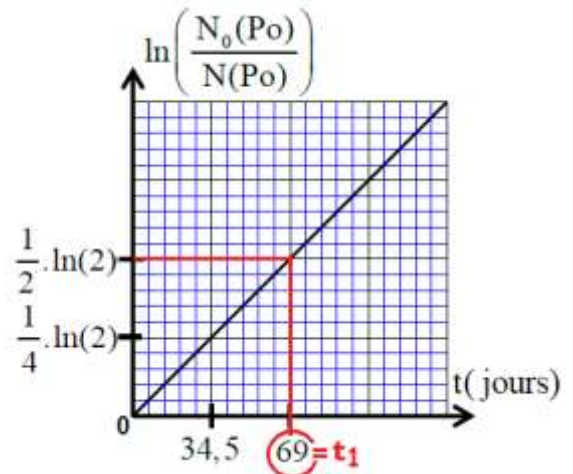
3-3- L'instant t_1 pour lequel $\frac{N(\text{Pb})}{N(\text{Po})} = \frac{2}{5}$:

- $N(\text{Pb})$ est le nombre de noyaux de plomb formés à l'instant t_1 ; c'est aussi le nombre de noyaux du polonium désintégrés :

$$N(\text{Pb}) = N_D(\text{Po}) = N_0(\text{Po}) - N(\text{Po})$$

$$\frac{N_0(\text{Po}) - N(\text{Po})}{N(\text{Po})} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{N_0(\text{Po})}{N(\text{Po})} - 1 = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{N_0(\text{Po})}{N(\text{Po})} = \frac{7}{5}$$

Alors $\ln\left(\frac{N_0(\text{Po})}{N(\text{Po})}\right) = \ln\left(\frac{7}{5}\right) \approx \ln(\sqrt{2}) \approx \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$



- Par projection ; on trouve $t_1 \approx 69 \text{ j}$

Remarque :

- Théoriquement on peut écrire :

$$\ln\left(\frac{N_0(\text{Po})}{N(\text{Po})}\right) = \ln\left(\frac{7}{5}\right) \Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} \cdot t_1 = \ln\left(\frac{7}{5}\right) \Leftrightarrow t_1 = t_{1/2} \cdot \frac{\ln\left(\frac{7}{5}\right)}{\ln(2)}$$

- **A.N :** $t_1 = 138,6 \times \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln\left(\frac{7}{5}\right) \approx 67,3 \text{ j}$

L'ELECTRICITE :

1- Réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension :

1-1- Equation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$ du courant :

- D'après la loi d'additivité des tensions entre A et M :

$$E - u_r = u_{R_0} + u_b$$

- En respectant les conventions :

$$u_{R_0} = R_0 \cdot i ; u_r = r \cdot i \text{ et } u_b = r_0 \cdot i + L_0 \cdot \frac{di}{dt}$$

Alors $E - r \cdot i = R_0 \cdot i + r_0 \cdot i + L_0 \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow L_0 \cdot \frac{di}{dt} + (r + r_0 + R_0) \cdot i = E$

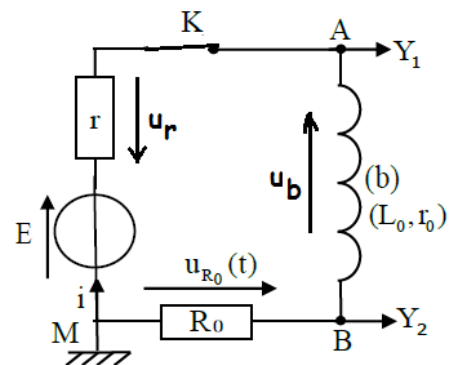


Figure 1

1-2- Valeur de E :

- La courbe (C_2) passe par l'origine O : à l'instant $t = 0$: $u_{BM}(0) = 0$

La loi d'ohm permet d'écrire : $u_{BM}(t) = R_0 \cdot i(t)$:

On en déduit que : $i(0) = 0$

- La courbe (C_1) représente la tension : $u_{AM}(t) = E - r \cdot i(t)$;

et à l'instant $t = 0$: $u_{AM}(0) = E - r \cdot i(0) = E$, puis graphiquement on trouve : $u_{AM}(0) = 12 \text{ V}$

On en déduit alors que $E = 12 \text{ V}$

1-3- * Valeur de r :

- Quand le régime permanent sera établi :

* Graphiquement on relève les tensions : $u_{AM\infty} = 10V$ et $u_{BM\infty} = 9V$

* Ces tensions s'écrivent aussi : $u_{AM\infty} = E - r.I_{\max}$ et $u_{BM\infty} = R_0.I_{\max}$

- Des 2 relations on obtient l'expression : $r = R_0 \cdot \frac{E - u_{AM\infty}}{u_{BM\infty}}$

- A.N : $r = 45 \cdot \frac{12 - 10}{9} = 10\Omega$

*** Montrons que $r_0 = 5\Omega$:**

- Au régime permanent l'équation différentielle peut s'écrire : $\underbrace{\frac{di}{dt}}_{=0} + \frac{(r + r_0 + R_0)}{L_0} \cdot i = \frac{E}{L_0}$

On obtient la relation : $\underbrace{\frac{di}{dt}}_{=0} + \frac{(r + r_0 + R_0)}{L_0} \cdot \underbrace{i}_{=I_{\max}} = \frac{E}{L_0}$ ou bien $(r + r_0 + R_0).I_{\max} = E$

- Remplaçons $I_{\max}$ par $I_{\max} = \frac{u_{BM\infty}}{R_0}$ on aura : $(r + r_0 + R_0) \cdot \frac{u_{BM\infty}}{R_0} = E$

- Finalement : $r_0 = R_0 \cdot \frac{E}{u_{BM\infty}} - r - R_0$

- A.N : $r_0 = 45 \cdot \frac{12}{9} - 10 - 45 = 5\Omega$

1-4- Vérifions que $L_0 = 0,18H$:

- La constante du temps du circuit étudié a pour expression : $\tau = \frac{L_0}{r + r_0 + R_0}$

et sa valeur graphiquement est : $\tau = 3ms = 3 \cdot 10^{-3}s$

- L'expression de l'inductance de la bobine est : $L_0 = \tau \cdot (r + r_0 + R_0)$

- A.N : $L_0 = 3 \cdot 10^{-3} \cdot (10 + 5 + 45) = 0,18H$

2- Décharge d'un condensateur dans le dipôle RL :**2-1- Le régime d'oscillations qui correspond aux courbes de la figure4 :**

C'est le régime pseudo périodique.

2-2- Equation différentielle vérifiée par la tension $u_c(t)$:

D'après la figure3 : $u_b + u_R + u_c = 0$

En respectant les conventions : $u_b = L_0 \cdot \frac{di}{dt} + r_0 \cdot i$ et $u_R = R \cdot i$

On aussi : $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C \cdot u_c)}{dt} = C \cdot \frac{du_c}{dt}$

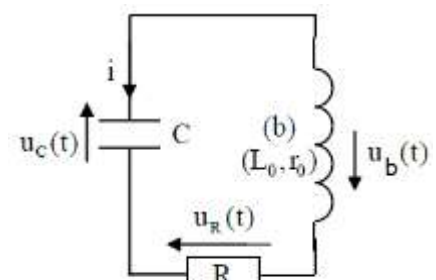


Figure 3

**Correction du sujet de l'examen national du Baccalauréat
Session normale : 2016**

Alors : $L_0 C \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} + (r_0 + R) \cdot C \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$ ou bien $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{(r_0 + R)}{L_0} \cdot \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{L_0 C} \cdot u_c = 0$

2-3- Energie $|E_j|$ dissipée par effet joule dans le circuit entre $t_1 = 0$ et $t_2 = 14\text{ms}$:

- L'expression de l'énergie totale emmagasinée dans le circuit RLC à l'instant t est :

$$E_{\text{Tot}}(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (u_c(t))^2 + \frac{1}{2} \cdot L_0 \cdot (i(t))^2 \quad \text{avec } i(t) = \frac{1}{R} \cdot u_R(t)$$

$$\Rightarrow E_{\text{Tot}}(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (u_c(t))^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{L_0}{R^2} \cdot (u_R(t))^2$$

- L'énergie totale emmagasinée dans le circuit RLC à $t_1 = 0$ est :

$$E_{\text{Tot}}(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left(\underbrace{u_c(0)}_{=12\text{V}} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{L_0}{R^2} \cdot \left(\underbrace{u_R(0)}_{=0} \right)^2$$

A.N : $E_{\text{Tot}}(0) = \frac{1}{2} \times 14,1 \cdot 10^{-6} \times 12^2 \approx 1,02 \cdot 10^{-3} \text{ J}$

- L'énergie totale emmagasinée dans le circuit RLC à $t_2 = 14\text{ms}$ est :

$$E_{\text{Tot}}(t_2) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left(\underbrace{u_c(t_2)}_{=-3,2\text{V}} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{L_0}{R^2} \cdot \left(\underbrace{u_R(t_2)}_{=-0,5\text{V}} \right)^2$$

$\Rightarrow E_{\text{Tot}}(t_2) = \frac{1}{2} \times 14,1 \cdot 10^{-6} \times (-3,2)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{0,18}{20^2} \times (-0,5)^2 \approx 1,28 \cdot 10^{-4} \text{ J}$

- L'énergie dissipée est :

$$|E_j| = E_{\text{Tot}}(t_1 = 0) - E_{\text{Tot}}(t_2 = 14\text{ms})$$

$$|E_j| = 1,02 \cdot 10^{-3} - 1,28 \cdot 10^{-4} \approx 8,92 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

3- Oscillations forcées dans un circuit RLC série :

3-1- La fréquence f_0 des oscillations électriques à la résonance :

- Expression du facteur de qualité $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$ où Δf : la largeur de la bande passante à -3dB

D'où : $f_0 = Q \cdot \Delta f$

- A.N : $f_0 = 7 \times 14,3 \approx 100 \text{ Hz}$

3-2- La valeur de R_1 et celle de C_1 :

- A la résonance on peut écrire : $U = (R + r_0) \cdot I_0$ alors $R_1 = \frac{U}{I_0} - r_0$

- A la résonance on peut écrire : $L_0 \cdot C_1 \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0)^2 = 1$ alors $C_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot f_0^2 \cdot L_0}$

- A.N : $R_1 = \frac{3}{0,185} - 5 = 11,2 \Omega$ et $C_1 = \frac{1}{4 \times 10 \times 100^2 \times 0,18} \approx 1,39 \cdot 10^{-5} \text{ F}$

3-3- La puissance électrique moyenne, consommée par effet joule :

- L'expression de la puissance électrique moyenne, consommée par effet joule : $P_{\text{moy}} = R_{\text{Tot}} \cdot I^2$

- Lorsque la fréquence prend l'une des valeurs limitant la bande passante : $I = I_0 / \sqrt{2}$
- Finalement : $P_{moy} = \frac{(R_1 + r_0) \cdot I_0^2}{2}$
- A.N : $P_{moy} = \frac{(11,2 + 5) \cdot 0,185^2}{2} \approx 0,28 J$

LA MECANIQUE :

PARTIE I : Etude de la chute de deux boules dans l'air

1- Equation différentielle du mouvement vérifiée par v_z :

- Système à étudier : {La boule}
- Repère d'étude R (O ; $\vec{k}$) supposé galiléen ;
- Bilan des forces extérieures :
 - * Poids du corps : $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = -mg \vec{k}$
 - * Force de frottement fluide : $\vec{f} = 0,22 \cdot \rho_{air} \cdot \pi \cdot R^2 v_z^2 \cdot \vec{k}$
- 2^{ème} loi de Newton : $m \cdot \vec{a}_G = \vec{f} + \vec{P}$
- Projection de cette relation vectorielle sur l'axe Oz : $m \cdot a_z = f_z + P_z$ (*)
- Expressions : $f_z = 0,22 \cdot \rho_{air} \cdot \pi \cdot R^2 v_z^2$; $P_z = -P = -m \cdot g$ et $a_z = \frac{dv_z}{dt}$
- La relation (*) devient : $m \cdot \frac{dv_z}{dt} = 0,22 \cdot \rho_{air} \cdot \pi \cdot R^2 v_z^2 - m \cdot g$
- ou bien : $\frac{dv_z}{dt} = -g + \frac{0,22 \cdot \rho_{air} \cdot \pi \cdot R^2}{m} v_z^2$ avec $m = \rho_i \cdot V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho_i$
- L'équation devient : $\frac{dv_z}{dt} = -g + \frac{0,66 \cdot \rho_{air} \cdot \pi \cdot R^2}{4 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho_i} v_z^2$
- Et finalement après simplification : $\frac{dv_z}{dt} = -g + 0,165 \cdot \frac{\rho_{air}}{R \cdot \rho_i} v_z^2$

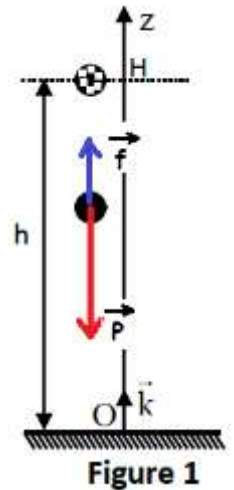


Figure 1

2- Expression de la vitesse limite du mouvement d'une boule :

- Au régime permanent la vitesse reste constante : $v_z = v_{lim}$ et $\frac{dv_z}{dt} = 0$
- L'équation différentielle s'écrit : $0 = -g + 0,165 \cdot \frac{\rho_{air}}{R \cdot \rho_i} v_{lim}^2$
- On obtient l'expression : $v_{lim} = -\sqrt{\frac{g \cdot R \cdot \rho_i}{0,165 \cdot \rho_{air}}}$ car $v_z < 0$

3-1- La courbe (C₁) correspond aux variations de la vitesse de la boule (b) :

- Pour la boule (b) on a :

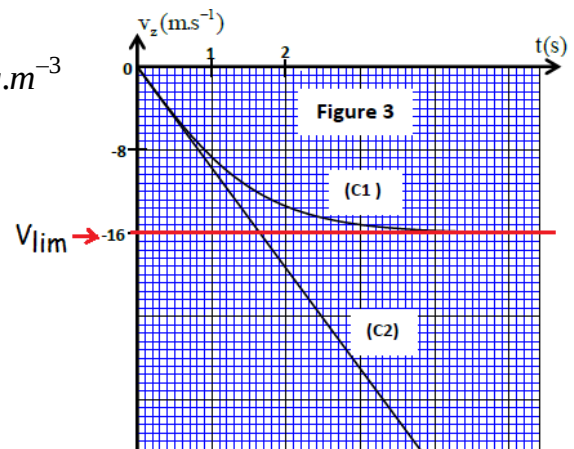
$$v_{lim} = -\sqrt{\frac{g \cdot R \cdot \rho_i}{0,165 \cdot \rho_{air}}} \quad \text{avec } R = 6\text{cm} \text{ et } \rho_2 = 94\text{Kg.m}^{-3}$$

$$\text{A.N : } v_{lim} = -\sqrt{\frac{9,8 \times 6 \cdot 10^{-2} \times 94}{0,165 \times 1,3}} \approx -16\text{m.s}^{-1}$$

- D'après la figure 3 ; la courbe (C₁) a une limite finie :

$$v_{lim} = -16\text{m.s}^{-1}$$

- Donc La courbe (C₁) correspond aux variations de la vitesse de la boule (b).

**3-2- La courbe (C'₂) correspond aux variations de la côte de la boule (a) :**

La boule (a) a pour masse volumique $\rho_1 = 1,14 \cdot 10^4 \text{Kg.m}^{-3}$ et celle de (b) est $\rho_2 = 94\text{Kg.m}^{-3}$. $\rho_2 \ll \rho_1$. Or les deux boules ont le même volume $V = (4/3) \cdot \pi \cdot R^3$; et que $m = \rho \cdot V$ donc la boule (b) est plus légère que (a), alors cette dernière arrive la première au sol au bout de 3,7s contrairement à la boule (b) qui met 4,4s pour toucher le sol : cela montre que les variations de la côte z de (a) correspond à la courbe (C'₂).

4- * La nature du mouvement de la boule (a) :

La courbe (C₂) est celle de la fonction linéaire $v_z(t) = K \cdot t$: le mouvement de (a) est rectiligne uniformément varié.

*** Equation horaire z(t) :**

$$\text{On a : } v_z(t) = K \cdot t \quad \text{avec } K = \frac{\Delta v_z}{\Delta t} = \frac{(-16) - 0}{1,65 - 0} \approx -9,7\text{m.s}^{-2}$$

Or $\frac{dz}{dt} = v_z(t) = -9,7 \cdot t$ et par intégration et en tenant compte de la condition initiale $z(0) = h$:

$$\text{Alors : } z(t) = -4,85 \cdot t^2 + 69 \quad z(\text{en m}) \text{ et } t(\text{en s})$$

5- La différence d'altitude d entre les centres d'inertie des deux boules à t₁ = 3,7s :

$$d = \Delta z = z_b(t_1) - z_a(t_1) = 26 - 0 = 26\text{m}$$

6- Détermination de a_z(t_n) et v_z(t_{n+1}) :

- d'après l'énoncé : $v_z(t_n) = -11,47\text{m.s}^{-1}$

- L'équation différentielle s'écrit : $a_z(t_n) = -g + 0,165 \cdot \frac{\rho_{air}}{R \cdot \rho_i} \cdot v_z^2(t_n)$

$$\text{A.N : } a_z(t_n) = -9,8 + 0,165 \cdot \frac{1,3}{0,06 \times 94} \times (-11,47)^2 \approx -4,8\text{m.s}^{-2}$$

- L'équation d'Euler permet d'écrire : $v_z(t_{n+1}) = v_z(t_n) + a_z(t_n) \cdot \Delta t$

A.N : $v_z(t_{n+1}) = -11,47 + (-4,8) \times 0,125 \approx -12,10 \text{ m.s}^{-1}$

PARTIE II : Etude du mouvement d'un pendule de torsion :

1- Equation différentielle vérifiée par l'abscisse $\theta(t)$ du pendule :

- Système à étudier : {la tige MN}

- Repère d'étude R (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) supposé galiléen ;

- Bilan des forces extérieures :

* Poids de la tige : $\vec{P}$

* Action du fil de torsion : $\vec{T}$

* Action du couple de torsion de moment : $M_c = -C \cdot \theta$

- La relation fondamentale de la dynamique dans le cas de la rotation :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{T}) + M_c = J_{\Delta} \ddot{\theta} \quad \text{avec} \quad M_{\Delta}(\vec{P}) = M_{\Delta}(\vec{T}) = 0$$

- On aboutit à la relation demandée :

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{J_{\Delta}} \cdot \theta = 0$$

2-1- Montrons que $\dot{\theta}(t) = 4 \cdot \sin\left(1,6\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$:

- Les fonctions horaires $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$ ont la même période T_0 :

- D'après la figure 5, la période est :

$$T_0 = 1,25 \text{ s} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2}{1,25} \cdot \pi = 1,6\pi$$

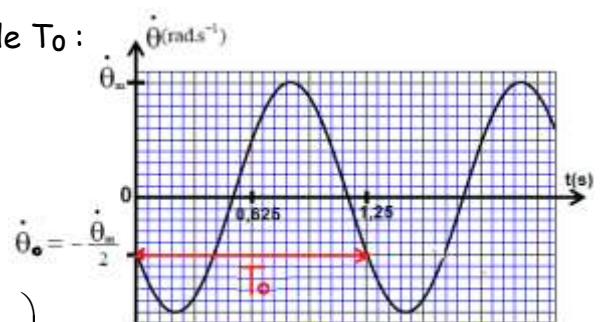
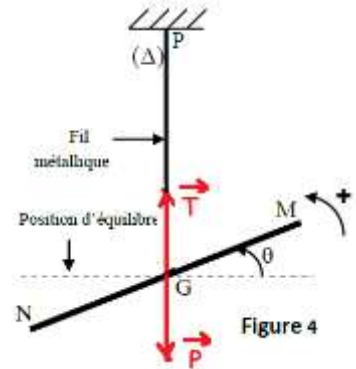
- La vitesse angulaire maximale $\dot{\theta}_m$:

On a la solution de l'équation est : $\theta(t) = \theta_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$

Alors la vitesse angulaire à l'instant t est : $\dot{\theta}(t) = -\frac{2\pi}{T_0} \theta_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right) = -\dot{\theta}_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$

On en déduit que : $\dot{\theta}_m = \frac{2\pi}{T_0} \cdot \theta_m = 1,6 \times \pi \times \frac{\pi}{4} = 4 \text{ rad.s}^{-1} \quad (\pi^2 \approx 10)$

- La phase φ à l'instant $t = 0$: $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(0) = -\dot{\theta}_m \cdot \sin(\varphi) = -\frac{\dot{\theta}_m}{2} < 0$ alors $\sin(\varphi) = \frac{1}{2}$



On en déduit que : $\varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

Finalement on peut écrire : $\dot{\theta}(t) = -4 \cdot \sin\left(1,6 \cdot \pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ or $-\sin\left(1,6 \cdot \pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(1,6 \cdot \pi t + \frac{\pi}{6} + \pi\right)$

Donc la solution est : $\dot{\theta}(t) = 4 \cdot \sin\left(1,6 \cdot \pi t + \frac{7 \cdot \pi}{6}\right)$

2-2- La valeur de la constante de torsion C du fil :

On sait que : $\frac{C}{J_{\Delta}} = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_0}\right)^2$ alors $C = J_{\Delta} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_0}\right)^2$

A.N : $C = 4 \cdot 10^{-4} \times \left(\frac{2 \cdot \pi}{1,25}\right)^2 = \underline{1,02 \cdot 10^{-2} \text{ N.m.rad}^{-1}}$

3- * La valeur de l'énergie mécanique de l'oscillateur :

$E_m = E_c + E_{pt} + E_{pp}$ avec $E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \dot{\theta}^2$, $E_{pt} = \frac{1}{2} C \cdot \theta^2$ et $E_{pp} = 0$

Alors $E_m = \text{Cte}$ et $E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \dot{\theta}_m^2$

A.N : $E_m = \frac{1}{2} \times 4 \cdot 10^{-4} \times 4^2 = \underline{3,2 \cdot 10^{-3} \text{ J}}$

*** La valeur de son énergie potentielle à l'origine des dates t = 0 :**

A l'instant t = 0 : $E_m = E_c(0) + E_{pt}(0) \Rightarrow E_{pt}(0) = E_m - E_c(0)$

Donc $E_{pt}(0) = E_m - \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \dot{\theta}_0^2$ or $\dot{\theta}_0 = -\frac{\dot{\theta}_m}{2}$

Alors : $E_{pt}(0) = E_m - \frac{1}{8} J_{\Delta} \cdot \dot{\theta}_m^2$

A.N : $E_{pt}(0) = 3,2 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{8} \times 4 \cdot 10^{-4} \times 4^2 = \underline{2,4 \cdot 10^{-3} \text{ J}}$