Exercices d'application et de réflexions avec solutions

Exercices avec solutions
Sur LES SUITES NUMERIQUES

Exercice1 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{5u_n+3}{u_n+3} & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

Et Soit la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1)montrer que $0\le u_n \le 3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) a)Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) que peut-on déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3) montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

4) déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n

5) déterminer $\lim v_n$ et $\lim u_n$

Solution : 1)a)montrons que : $0\le u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0 = 1 \ge 0$ donc la proposition vraie pour n=0

Supposons : $0\le u_n$

Montrons que : $0\le u_{n+1}$?

On a : $0\le u_n$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n+3}{u_n+3}$ donc $u_{n+1}\ge 0$

Donc : $0\le u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

b)montrons que : $u_n \le 3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0 = 1 \le 3$ donc la proposition vraie pour n=0

Supposons : $u_n \le 3$

Montrons que : $u_{n+1}\le 3$?

$$3-u_{n+1} = 3-\frac{5u_n+3}{u_n+3} = \frac{3(u_n+3)-(5u_n+3)}{u_n+3} = \frac{-2u_n+6}{u_n+3} = \frac{-2(u_n-3)}{u_n+3}$$

On a : $u_n\le 3$ et $0\le u_n$ donc $3-u_{n+1}\ge 0$

Donc : $u_{n+1}\le 3$

Donc : $0\le u_n \le 3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) a)Etude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$$u_{n+1}-u_n = \frac{5u_n+3}{u_n+3}-u_n = \frac{5u_n+3-u_n(u_n+3)}{u_n+3} = \frac{-u_n^2+2u_n+3}{u_n+3}$$

On a : $0\le u_n$ donc $0 \prec u_n+3$

Le signe de $u_{n+1}-u_n$ est celui de : $-u_n^2+2u_n+3$

$\Delta = 4+12 = 16 > 0$ donc: $x_1 = \dfrac{-2+4}{-2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-2-4}{-2} = 3$

Donc : $-u_n^2+2u_n+3 = -(u_n-3)(u_n+1)$

On a : $u_n \ge 0$ donc $u_n+1\ge 0$

Et on a : $u_n\le 3$ donc : $u_n-3\le 0$

Donc : $u_{n+1}-u_n = \dfrac{-(u_n-3)(u_n+1)}{u_n+3}\ge 0$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

b) la suite (u_n) est croissante et puisque (u_n) majorée par 3 alors :(u_n) est convergente.

Soit : $\lim u_n = l$ on a donc : $0\le l\le 3$

3) $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{5u_n+3}{u_n+3}-3}{\frac{5u_n+3}{u_n+3}+1} = \frac{\frac{5u_n+3-3(u_n+3)}{u_n+3}}{\frac{5u_n+3+(u_n+3)}{u_n+3}} = \frac{\frac{2u_n-6}{u_n+3}}{\frac{6u_n+6}{u_n+3}} = \frac{2u_n-6}{6u_n+6}$$

$$v_{n+1} = \frac{2(u_n-3)}{6(u_n+1)} = \frac{1}{3}\frac{u_n-3}{u_n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\frac{1}{3} = q$ et son premier terme : $v_0 = \dfrac{u_0-3}{u_0+1} = \dfrac{1-3}{1+1} = -1$

4)puisque : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\frac{1}{3} = q$ et son premier terme : $v_0 = -1$ alors :

$$v_n = (-1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Et on a :

$$v_n = \frac{u_n-3}{u_n+1} \Leftrightarrow v_n(u_n+1) = u_n-3 \Leftrightarrow v_nu_n+v_n-u_n = -3$$

$\Leftrightarrow u_n\left(v_n-1\right)=-3-v_n \Leftrightarrow u_n=\frac{-3-v_n}{v_n-1} \Leftrightarrow u_n=\frac{3+v_n}{1-v_n}$

Et on a : $v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ donc : $u_n=\frac{3-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

5) $\lim v_n$ et $\lim u_n$?

$\lim v_n=\lim-\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ car $-1\prec\frac{1}{3}\prec 1$

$\lim u_n=\lim\frac{3-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{3-0}{1+0}=3$ car $-1\prec\frac{1}{3}\prec 1$

Exercice2 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{u_n}{1+2u_n} \\ u_1=1 \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Et Soit la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n=\frac{1}{u_n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$ 1)calculer : u_1 et v_0

2) montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme

3) déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n

4) déterminer $\lim v_n$ et $\lim u_n$

Solution :

1) $u_1=\frac{u_0}{1+2u_0}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$ et $v_0=\frac{1}{u_0}=\frac{1}{1}=1$

2)

$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+2u_n}{u_n}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+2u_n-1}{u_n}=2=r$

Donc : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison : $r=2$ et son premier terme : $v_0=1$

3) puisque : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison : $r=2$ et son premier terme : $v_0=1$ alors :

$v_n=v_0+nr$ donc : $v_n=1+2n \ \forall n\in\mathbb{N}$

Et on a : $v_n=\frac{1}{u_n}$ et $v_n=1+2n$ donc : $u_n=\frac{1}{1+2n}$

4) $\lim v_n=\lim 1+2n=+\infty$

$\lim u_n=\lim\frac{1}{1+2n}=0$

Exercice3 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+2} \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1- Calculer les 3 premiers termes.

2- Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad :0\le u_n$

3- Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n\le 2$

Solution :1)on a $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$

Pour n=0 on a: $u_1=\sqrt{u_0+2}$ donc $u_1=\sqrt{2}$

Pour n=1 on a: $u_2=\sqrt{u_1+2}$ donc $u_2=\sqrt{\sqrt{2}+2}$

Pour n=2 on a: $u_3=\sqrt{u_2+2}$ donc

$u_3=\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+2}$

2) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $0\le u_n$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $u_0=0$ donc $0\le u_0$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence

Supposons que: $0\le u_n$

3étapes : Montrons alors que : $0\le u_{n+1}$??

Or on a : $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}\ge 0$

donc : $\forall n\in\mathbb{N} \quad :0\le u_n$

3) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n\le 2$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $u_0=0$ donc $u_0\le 2$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence

Supposons que: $u_n\le 2$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\le 2$??

on a : $u_n\le 2$ donc $u_n+2\le 4\Rightarrow\sqrt{u_n+2}\le\sqrt{4}$

$\Rightarrow u_{n+1}\le 2$

donc : $\forall n\in\mathbb{N} \quad :0\le u_n$ Par suite : $\forall n\in\mathbb{N} \ \ 0\le u_n\le 2$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 0 car $u_n \le 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0

car $0 \le u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad : 0 \le u_n \le 2$

Exercice4 :soit $(v_n)_{n\ge 1}$ la suite définie par :

$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1)Montrer que $(v_n)_{n\ge 1}$ est minorée par 0

2)Montrer que $(v_n)_{n\ge 1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$

3)Que peut-on déduire ?

Solution :1) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \le v_n$??

$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (Le conjugué)

$v_n = \frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2 - \left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \ge 0$

Donc : $0 \le v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc : $(v_n)_{n\ge 1}$ est minorée par 0

2)Montrons que : $v_n \le \frac{1}{2}$?? $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$v_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - \frac{1}{2} = \frac{2-\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

On a : $n \ge 1$ et $n+1 \ge 2$ donc $\sqrt{n} \ge 1$ et $\sqrt{n+1} \ge \sqrt{2}$

Donc : $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \ge 1+\sqrt{2}$ donc

$-\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) \le -1-\sqrt{2}$

donc $2-\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) \le 1-\sqrt{2}$ et puisque : $1-\sqrt{2} \prec 0$

Donc $v_n - \frac{1}{2} \prec 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc $v_n \prec \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc la suite $(v_n)_{n\ge 1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$

3)Donc la suite $(v_n)_{n\ge 1}$ est bornée car :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : 0 < v_n < \frac{1}{2}$

Exercice5 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Solutions : Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$-1 \le \cos n \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $-1 \le \sin\sqrt{n} \le 1$

donc : $1 \le 2+\cos n \le 3$ et $-1 \le -\sin\sqrt{n} \le 1$

donc : $1 \le 2+\cos n \le 3$ et $2 \le 3-\sin\sqrt{n} \le 4$

donc : $1 \le 2+\cos n \le 3$ et $\frac{1}{4} \le \frac{1}{3-\sin\sqrt{n}} \le \frac{1}{2}$

donc : $\frac{1}{4} \le \frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}} \le \frac{3}{2}$

cad : $\frac{1}{4} \le u_n \le \frac{3}{2}$ donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Exercice6 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = (-1)^n \sin\sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Solutions : Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$|u_n| = \left|(-1)^n \sin\sqrt{n}\right| = \left|(-1)^n\right|\left|\sin\sqrt{n}\right| = \left|\sin\sqrt{n}\right| \le 1$

donc $|u_n| \le 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$

donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Exercice7 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer par récurrence que $u_n \le u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solutions :1étapes :on a $u_1 = \sqrt{u_0+2} = \sqrt{2}$

Pour n=0 nous avons $u_0 = 1$ donc $u_0 \le u_1$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes :Supposons que: $u_n \le u_{n+1}$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \le u_{n+2}$??

on a : $u_n \le u_{n+1}$ donc $u_n + 2 \le u_{n+1} + 2$

donc : $\sqrt{u_n+2} \le \sqrt{u_{n+1}+2}$ donc $u_{n+1} \le u_{n+2}$

Par suite : : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : u_n \le u_{n+1}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Exercice8 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Solutions :

$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}+\frac{2^{n+1}}{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$

$u_{n+1}-u_n=\frac{2^{n+1}}{n+1}\succ 0$ Donc : $u_n\le u_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exercice9 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solutions :$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

Et on a : $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}=\sum_{k'=2}^{n+2}\frac{1}{n+k'}$ on pose $k'=k+1$

Et puisque k' est un variable on peut l'appeler k'

$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}=\sum_{k'=2}^{n+2}\frac{1}{n+k'}=\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n+k}$

Donc :

$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}\succ 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

$u_{n+1}-u_n=\frac{2^{n+1}}{n+1}\succ 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exercice 10:soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente

définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2} \\ u_0=3 \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4

3)Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solutions :1) Montrons que $2\le u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ؟؟؟؟

1étapes : n=0 on a : $2\le u_0$ car $2<3$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $2\le u_n$

3étapes : Montrons alors que : $2\le u_{n+1}$??

$u_{n+1}-2=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-2=\frac{8(u_n-1)-2(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{6u_n-12}{u_n+2}$

$u_{n+1}-2=\frac{6(u_n-2)}{u_n+2}$ et puisque on a : $2\le u_n$

Donc : $u_n-2\ge 0$ et $u_n+2>0$

Donc : $u_{n+1}-2\ge 0$

donc $2\le u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrons que $u_n\le 4 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ؟؟؟؟

1étapes : n=0 on a : $u_0\le 4$ car $3<4$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $u_n\le 4$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\le 4$??

$4-u_{n+1}=4-\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{4(u_n+2)-8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{-4u_n+16}{u_n+2}$

$4-u_{n+1}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}$ et puisque on a :

$u_n\le 4$

Donc : $4-u_n\ge 0$ et $u_n+2>0$

Donc $u_{n+1}\le 4$ par suite $u_n\le 4 \; \forall n\in\mathbb{N}$

3) $u_{n+1}-u_n=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-u_n=\frac{8(u_n-1)-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n^{\,2}+6u_n-8}{u_n+2}$

On va factoriser $-u_n^{\,2}+6u_n-8$: $\Delta=36-32=4>0$

$x_1=\frac{-6+2}{-2}=2$ et $x_2=\frac{-6-2}{-2}=4$ donc :

$-u_n^{\,2}+6u_n-8=-(u_n-2)(u_n-4)$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}$

Or on a : $u_n\ge 2$ et $u_n\le 4$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}\ge 0$ donc la suite

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exercice11 : Un jeune homme se préparait à l'examen du baccalauréat ; son père, pour l'encourager, lui demanda ce qu'il désirait en récompense

Mon examen devant avoir lieu le 20 juin, répond-t-il, donne-moi seulement 1 centime le 1er juin, 2 centimes le lendemain, 4 centimes le surlendemain, en doublant chaque jour jusqu'au 20 inclusivement. Et donne mois la somme. J'emploierai cet argent pour faire un voyage pendant les vacances.

Le père pensa qu'avec cette somme son fils n'irait pas loin ; mais au bout de quelques jours, il commença à s'apercevoir de son erreur.

Avec quelle somme le fils va-t-il pouvoir partir en vacances ?

Solution : Les nombres de centimes à payer chaque jour sont les termes d'une suite géométrique de 20 termes dont le premier est : $u_1 = 1$ et et la raison $q = 2$

$u_2 = 2$ (La somme à donner le 2 iem jour) ....

$u_{20} = ...$ (La somme à donner le 20e jour)

Donc : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$u_{20} = 2^{20-1} = 2^{19} = 524288$ Centimes

La somme totale à payer serait :

$$s_{20} = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{20} = u_1 \frac{1-2^{20-1+1}}{1-2}$$

$s_{20} = 2^{20} - 1 = 10485.75$

centimes $s_{20} \simeq 1 million$ 500dh   Joli voyage !

Exercice12 : calculer en fonction de n la somme suivante :

$$s_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Solutions :1)on pose : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a : $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison

$q = \frac{1}{2}$ Car : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$ Donc :

$$s_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Exercice13 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n) \\ u_0 = 2; u_1 = \frac{4}{9} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n = u_n - \frac{1}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a)Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme

b) écrire v_n et u_n en fonction de n

c) calculer la somme : $s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$

Solution :1)montrons par récurrence que

$u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1étapes : n=0 $u_1 = \frac{1}{9}u_0 + \frac{2}{3^{0+2}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes :Supposons que: $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

3étapes : Montrons alors que :

$u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}}$??

on a: $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$ donc $u_n = 9\left(u_{n+1} - \frac{2}{3^{n+2}}\right)$

et on a : $u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n)$

$$u_{n+2} = \frac{1}{27}\left(12u_{n+1} - 9\left(u_{n+1} - \frac{2}{3^{n+2}}\right)\right)$$

$u_{n+2} = \frac{1}{27}\left(3u_{n+1} + \frac{2}{3^n}\right)$ donc $u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+2}}$

Par suite : : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

2)a) on a: $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}}$

Donc : $v_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} - \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{9}u_n - \frac{1}{3^{n+2}}$

$v_{n+1} = \frac{1}{9}\left(u_n - \frac{1}{3^n}\right)$ donc $v_{n+1} = \frac{1}{9}v_n$

Donc $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{9}$ et de premier terme $v_0=1$

2) b)écrire v_n et u_n en fonction de n

On a $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{9}$ et de premier terme $v_0=1$

Donc : $v_n=v_0\times q^n \Leftrightarrow v_n=\left(\frac{1}{9}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Puisque : $u_n=v_n+\frac{1}{3^n}$ donc $u_n=\left(\frac{1}{9}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n$

2) c) $s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+...+u_n$??

$u_n=v_n+w_n$ avec $w_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

on a $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites géométriques de raison $q=\frac{1}{9}$ et $q'=\frac{1}{3}$ donc

donc $s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=\sum_{k=0}^{k=n}v_k+\sum_{k=0}^{k=n}w_k$

$$s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=v_0\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{9}}+w_0\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{8}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right)+\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{k=n}u_k=\frac{21}{8}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice14 :soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0\in\left]-1;0\right[\end{cases}$$

1) Montrer que $-1\prec u_n\prec 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrer que $u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Et en déduire que : $u_n\geq\frac{u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Solution : 1) montrons par récurrence que $-1\prec u_n\prec 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1étapes : n=0 on a : $-1\prec u_0\prec 0$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes :Supposons que: $-1\prec u_n\prec 0$

3étapes : Montrons alors que : $-1\prec u_{n+1}\prec 0$??

On a : $-1\prec u_n\prec 0$ donc : $1\prec u_n+2\prec 2$

donc : $1\prec\sqrt{u_n+2}\prec\sqrt{2}$ donc : $\frac{1}{\sqrt{2}}\prec\frac{1}{\sqrt{u_n+2}}\prec 1$

et puisque : $0\prec -u_n\prec 1$ alors : $0\prec\frac{-u_n}{\sqrt{u_n+2}}\prec 1$

donc : $-1\prec\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\prec 0$ donc $-1\prec u_{n+1}\prec 0$

d'où : $-1\prec u_n\prec 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrons que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}-u_n=\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\left(1-\sqrt{u_n+2}\right)$$

et puisque : $1-\sqrt{u_n+2}\prec 0$ et $\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\prec 0$

alors : $u_{n+1}-u_n\succ 0$ donc $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrons que $u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $u_n\geq u_0$ car $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante

Donc : $\sqrt{2+u_n}\geq\sqrt{2+u_0}$ cad $\frac{1}{\sqrt{2+u_n}}\leq\frac{1}{\sqrt{2+u_0}}$

et puisque : $u_n\prec 0$ alors : $\frac{u_n}{\sqrt{2+u_n}}\geq\frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

Donc : $u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

3)Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $0\succ u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

Donc : $0\leq -u_{n+1}\leq\frac{-u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

En donnant à n des valeurs on trouve :

$0\leq -u_1\leq\frac{-u_0}{\sqrt{2+u_0}}$

$0 \le -u_2 \le \frac{-u_1}{\sqrt{2+u_1}}$

………

$0 \le -u_{n-1} \le \frac{-u_{n-2}}{\sqrt{2+u_0}}$

$0 \le -u_n \le \frac{-u_{n-1}}{\sqrt{2+u_0}}$

Le produit des inégalités donne :

$0 \prec -u_n \le \frac{-u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n}$

Donc : $u_n \ge \frac{u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

2) écrire u_n en fonction de n

Solution :

1) $v_{n+1} = 1-\frac{2}{u_{n+1}} = 1-\frac{2}{\frac{u_n}{3-u_n}} = 1-\frac{6-2u_n}{u_n}$

$v_{n+1} = 3\left(1-\frac{2}{u_n}\right)$ donc $v_{n+1} = 3v_n$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=3$ et de premier terme $v_0=-3$

2) écrire u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=3$ et de premier terme $v_0=-3$

Donc : $v_n = u_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = -3\times 3^n = -3^{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$

Puisque : $v_n = 1-\frac{2}{u_n}$ donc $u_n = \frac{2}{1-v_n}$ donc $u_n = \frac{2}{1+3^{n+1}}$

Exercice15 : Utiliser les Opération sur les limites des suites pour calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}}-\frac{2}{3n}+\frac{5}{n^2}-1$ ***2)*** $\lim_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

3) $\lim_{n\to+\infty} n^2-n$ ***4)*** $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}-2n$

5) $\lim_{n\to+\infty} 4n^2-2n-5$ ***6)*** $\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5}$

7) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2-3n+2}-n$

Solutions :

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}}-\frac{2}{3n}+\frac{5}{n^2}-1 = 0-0+0-1=-1$

Car : $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3n}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{n^2}=0$

2) $\lim_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = (-3+0)(1+0) = (-3)(1) = -3$

Car : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$

3) $\lim_{n\to+\infty} n^2-n$ directement on trouve une forme indéterminée $(+\infty-\infty)$

$\lim_{n\to+\infty} n^2-n = \lim_{n\to+\infty} n(n-1) = +\infty$

Car : $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} n-1=+\infty$ et $+\infty\times+\infty=+\infty$

4) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}-2n$ directement on trouve une forme indéterminée $(+\infty-\infty)$

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}-2n = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(1-2\sqrt{n}\right) = -\infty$

Car : $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(1-2\sqrt{n}\right)=-\infty$ et $+\infty\times-\infty=-\infty$

5) $\lim_{n\to+\infty} 4n^2-2n-5 = \lim_{n\to+\infty} n^2\left(4-\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}\right)$

Et puisque : $\lim_{n\to+\infty} -\frac{2}{n}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{-5}{n^2}=0$ et $\lim_{n\to+\infty} n^2=+\infty$

Alors : $\lim_{n\to+\infty} 4n^2-2n-5=+\infty$

6)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(4-\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{5}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(4-\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{\left(3+\frac{5}{n^2}\right)} = \frac{4}{3}$$

car : $\lim_{n\to+\infty}-\frac{3}{n}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{-7}{n^2}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{n^2}=0$

7)

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2-3n+2}-n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-3n+2}+n\right)\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)}{\left(\sqrt{n^2-3n+2}+n\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-3n+2-n^2}{\sqrt{n^2-3n+2}+n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-3n+2}{\sqrt{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}+n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(-3+\frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}+1\right)} \lim_{n\to+\infty} \frac{-3+\frac{2}{n}}{\sqrt{\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}+1} = -\frac{3}{2}$$

Exercice16 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{n\to+\infty} 4n^3-5n^2+3n-1$ 2) $\lim_{n\to+\infty} 6n^3-2n^5+7n-9$

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{9n-3}{3n+5}$ 4) $\lim_{n\to+\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1}$ 5) $\lim_{n\to+\infty} \frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}$

6) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3n-4}$

Solutions :

1) $\lim_{n\to+\infty} 4n^3-5n^2+3n-1 = \lim_{n\to+\infty} 4n^3 = +\infty$

2) $\lim_{n\to+\infty} 6n^3-2n^5+7n-9 = \lim_{n\to+\infty} -2n^5 = -\infty$

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{9n-3}{3n+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{9n}{3n} = \frac{9}{3} = 3$

4) $\lim_{n\to+\infty} \frac{6n^2-9}{3n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{6n^2}{3n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\times2\times n\times n}{3n} = \lim_{n\to+\infty} 2\times n = +\infty$

5) $\lim_{n\to+\infty} \frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7n^2}{14n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7n\times n}{14n\times n\times n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$

6) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^5+3n-4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\times n}{n\times n\times n\times n\times n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

Exercice 17 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ 2) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n+1}-n$

3) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^5+2n^3-n+4}$

Solutions : 1)

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)} = 0$$

2) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n+1}-n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\left(\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+n\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+1} = \frac{1}{2}$$

3) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^5+2n^3-n+4} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{n^5} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$

Exercice 18 : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$v_n = 2(-1)^n + \frac{4}{3}n^2 + 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1)montrer que : $v_n \geq \frac{4}{3}n^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2)en déduire : $\lim_{n\to+\infty} v_n$

Solutions :1) on a : $(-1)^n \geq -1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $2(-1)^n \geq -2$ donc $2(-1)^n + \frac{4}{3}n^2 + 2 \geq -2 + \frac{4}{3}n^2 + 2$

Donc : $v_n \geq \frac{4}{3}n^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) on a : $v_n \geq \frac{4}{3}n^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ et $\lim \frac{4}{3}n^2 = +\infty$

Donc : $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ d'après : Théorème 4

Exercice19 : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$v_n = 3n + 5\sin n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

calculer : $\lim_{n\to+\infty} v_n$

Solutions : on a : $\sin n \geq -1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $5\sin n \geq -5$ donc $v_n \geq 3n-5$

on a : $v_n \geq 3n-5 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ et $\lim 3n-5 = +\infty$

Donc : $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ d'après : Théorème 4

Exercice 20 : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$v_n = -4n + 3\cos n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

calculer : $\lim_{n\to+\infty} v_n$

Solutions : on a : $\cos n \leq 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $3\cos n \leq 3$ donc $v_n \leq -4n+3$

on a : $v_n \leq -4n+3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ et $\lim -4n+3 = -\infty$

Donc : $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ d'après : Théorème 5

Exercice 21 : soit (u_n) la suite définie par :

$u_n = 3 + \frac{\sin n}{n^3} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

calculer : $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Solutions : on a : $u_n = 3 + \frac{\sin n}{n^3}$

donc : $u_n - 3 = \frac{\sin n}{n^3}$ donc : $|u_n - 3| = \left|\frac{\sin n}{n^3}\right|$

donc : $|u_n - 3| \leq \frac{1}{n^3}$ car : $|\sin n| \leq 1$

et puisque : $\lim \frac{1}{n^3} = 0$ alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$

Exercice 22 : calculer : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n}$

Solutions : on a : $-1 \leq \sin n \leq 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $\frac{-1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Or on a : $\lim \frac{-1}{n} = \lim \frac{1}{n} = 0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Exercice 23 : soit $(v_n)_{n\ge4}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} v_{n+1} = \frac{5v_n}{n+1} \\ v_4 = 10 \end{cases}$

montrer que La suite $((v_n)_{n\ge4}$ est convergente.

Solutions : 1) $v_{n+1} - v_n = \frac{5v_n}{n+1} - v_n = \frac{4-n}{n+1} v_n$

Et puisque $v_n \succ 0$: $\forall n \ge 4$ (vérifier le par récurrence)

Alors : $v_{n+1} - v_n \le 0 \quad \forall n \ge 4$ Donc : $((v_n)_{n\ge4}$ est décroissante

Et puisque : $v_n \succ 0 \;\; \forall n \ge 4$ alors $(v_n)_{n\ge4}$ est minorée par 0 *Conclusion :* $(v_n)_{n\ge4}$ est convergente

Exercice 24 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n+2}$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n - 2\sin\frac{1}{n}}{4n + \sin\frac{1}{n}}$

Solutions : 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n+2}$??

on a : $-1 \le \cos n \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $\frac{-1}{n+2} \le \frac{\cos n}{n+2} \le \frac{1}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Or on a : $\lim -\frac{1}{n+2} = \lim \frac{1}{n+2} = 0$ donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n+2} = 0$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n - 2\sin\frac{1}{n}}{4n + \sin\frac{1}{n}}$ posons : $u_n = \frac{3n - 2\sin\frac{1}{n}}{4n + \sin\frac{1}{n}}$

donc : $\left|u_n - \frac{3}{4}\right| = \frac{11}{4}\left|\frac{\sin\frac{1}{n}}{4n + \sin\frac{1}{n}}\right|$ (a vérifier)

et on a : $-1 \le \sin n \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ donc :

$4n - 1 \le 4n + \sin\frac{1}{n} \le 4n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc : $\frac{1}{4n+1} \le \frac{1}{4n + \sin\frac{1}{n}} \le \frac{1}{4n-1}$

et puisque $\left|\sin\frac{1}{n}\right| \le 1$ et $\left|\frac{1}{4n + \sin\frac{1}{n}}\right| \le \frac{1}{4n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc : $\left|\frac{\sin\frac{1}{n}}{4n + \sin\frac{1}{n}}\right| \le \frac{1}{4n-1}$ Donc : $\left|u_n - \frac{3}{4}\right| \le \frac{11}{4(4n-1)}$

et puisque : $\lim \frac{11}{4(4n-1)} = 0$ alors ;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n - 2\sin\frac{1}{n}}{4n + \sin\frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$

Exercice 25 : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$v_{n+1} = v_n + n^4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = 1$

montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Solutions : on a : $v_{n+1} - v_n = n^4 \ge 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée ?

Supposons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée

Donc : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un $l \in \mathbb{R}$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ et on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = l$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} - v_n = 0$ or on a : $v_{n+1} - v_n = n^4$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} - v_n = \lim\limits_{n\to+\infty n} n^4 = +\infty$ absurde$(+\infty = 0)$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée et croissante

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Exercice 26 : Soit la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = x^2 + x + 1$

1. Monter que la suite (u_n) est croissante
2. Montrer que la suite (u_n) est non majorée (Par absurde) .
3. En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 27 : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$v_n = \sqrt{\frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 4}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Solutions : on pose : $u_n = \dfrac{2n^2-n+1}{3n^2+4}$

Donc : $v_n = f(u_n)$ avec : $f(x)=\sqrt{x}$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2-n+1}{3n^2+4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2}{3n^2} = \dfrac{2}{3}$

Et f est continue en $\dfrac{2}{3}$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Exercice 28 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \tan\left(\dfrac{\pi n+1}{3n+4}\right)$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\sqrt{\dfrac{16n^2-3n+1}{2n^2+1}}}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan\left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

Solutions : 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi n+1}{3n+4} = \dfrac{\pi}{3}$ et la fonction f

tel que : $f(x)=\tan x$ est continue en $\dfrac{\pi}{3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \tan\left(\dfrac{\pi n+1}{3n+4}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{16n^2-3n+1}{2n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{16n^2}{2n^2} = 8$ et la fonction f

tel que : $f(x)=\sqrt{\sqrt{x}}$ est continue en 8

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\sqrt{\dfrac{16n^2-3n+1}{2n^2+1}}} = \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt[4]{8}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan\left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = ?$ on pose : $t=\dfrac{1}{n}$

$n \to +\infty \Leftrightarrow t \to 0$

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$

et la fonction f tel que : $f(x)=\arctan(x)$ est continue en 1

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan\left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 29 : calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (-5)^n$

Solutions : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ car $a=2>1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ car $-1<a=\dfrac{2}{3}<1$

$(-5)^n$ N'a pas de limites car $a=-5<-1$

Exercice 30 : calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{n\to+\infty} (0,7)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (4)^{-n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(5)^n}{(4)^n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (3)^n - \dfrac{1}{2^n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n}$

Solutions : $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,7)^n = 0$ car $-1<a=0,7<1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2}^n = +\infty$ car $a=\sqrt{2}>1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (-2)^n$ N'a pas de limites car $a=-2<-1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (4)^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(4)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1<a=\dfrac{1}{4}<1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(5)^n}{(4)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{4}\right)^n = +\infty$ car $a=\dfrac{5}{4}>1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (3)^n - \dfrac{1}{2^n} = +\infty - 0 = +\infty$ car $a=3>1$ et $-1<\dfrac{1}{2}<1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(3)^n}{(2)^n} + \dfrac{(2)^n}{(2)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 1 = +\infty + 1 = +\infty$

Exercice 31 : Soit la fonction $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1$

1. Déterminer le point d'intersection de C_f avec la droite (Δ) $y = x$

2. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Poser sur l'axe des abscisses les 3 premiers termes de la suite (u_n)

b) Conjecturer la monotonie de la suite (u_n) et sa limite potentielle.

3. Montrer que la suite (u_n) est croissante majorée par 2.

4. Soit la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_n + \alpha$

a) Déterminer α pour que la suite (v_n) soit géométrique.

b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n

c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 32 : Soit la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1) Etudier les variations de f sur $I = [0,1]$

et Montrer que $f(I) \subset I$

2) a) Montrer que :($\forall n \in \mathbb{N}$) $u_n \in I = [0,1]$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Solution : 1) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

La fonction f est croissante et continue sur $I = [0,1]$ donc :

$$f(I) = f([0,1]) = [f(0), f(1)] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \subset [0,1]$$

2) a) montrons que :($\forall n \in \mathbb{N}$) $0 \le u_n \le 1$

- on a : $0 \le u_0 \le 1$ la ppté est vraie pour n=0
- supposons que : $0 \le u_n \le 1$
- montrons que : $0 \le u_{n+1} \le 1$?

on a : $0 \le u_n \le 1$ donc $u_n \in I = [0,1]$

donc : $f(u_n) \in f(I) \subset I$ donc : $u_{n+1} \in [0,1]$

donc : $0 \le u_{n+1} \le 1$

Conclusion : ($\forall n \in \mathbb{N}$) $0 \le u_n \le 1$

2) b) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1+u_n}{2} - u^2{}_n\right) \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n}$$

On a : $\frac{1+u_n}{2} - u^2{}_n = \frac{-2u^2{}_n + u_n + 1}{2} = \frac{-2(u_n - 1)\left(u_n + \frac{1}{2}\right)}{2}$

Et puisque : $0 \le u_n \le 1$ alors : $u_{n+1} - u_n \ge 0$

Donc : la suite (u_n) est croissante

et puisque : (u_n) majorée par 1 alors :

(u_n) est convergente.

c) (u_n) est convergente et la limite est solutions de l'équation $f(x) = x$

donc : $l = f(l) \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{1+l}{2}} \Leftrightarrow 2l^2 - l - 1 = 0$

donc : $l = 1$ ou $l = -\frac{1}{2}$ et puisque : $0 \le l \le 1$

donc : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

Exercices 33 : Soit la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$

1. Etudier les variations de f et déterminer f ([0,2])

2. a) Montrer que :($\forall n \in \mathbb{N}$) $u_n \in I = [0,2]$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercices 34 : Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

2. Montrer que ($\forall n \in \mathbb{N}$)($v_n > u_n$)

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Exercice35 : Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = a$ et $v_0 = b$ avec $0 < a < b < 2a$

$u_n v_n = ab$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

1. Montrer que ($\forall n \in \mathbb{N}$)($0 < u_n < v_n$)

2. En déduire que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante

3. a) Montrer ($\forall n \in \mathbb{N}$) $v_{n+1} - u_{n+1} \prec \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

b) En déduire : $\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n$

Exercice 36 : Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par : $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

2) calculer : $\lim_{n\to+\infty} v_n-u_n$

Solution :

1) $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^3}\succ 0$ donc : (u_n) est croissante

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=-\frac{(n^2+n+1)}{n(n+1)^3}\prec 0$$

donc : (v_n) est décroissante.

2)on a $\lim_{n\to+\infty} v_n-u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

Exercice37: Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par : $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n+1}$ et $v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

2) calculer : $\lim_{n\to+\infty} v_n-u_n$

Solution :

1) $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}\succ 0$$

donc : (u_n) est croissante

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\prec 0$$

donc : (v_n) est décroissante.

2) $\lim_{n\to+\infty} v_n-u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

Exercice38: Soit les suites numériques : (x_n) et (u_n) et (v_n) définies par : $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et $u_n=x_{2n}$ et $v_n=x_{2n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Solution :il suffit de montrer que Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes ???

$$u_{n+1}-u_n=x_{2n+2}-x_{2n}=\frac{1}{(2n+1)^2}-\frac{1}{(2n+2)^2}\succ 0$$

donc : (u_n) est croissante

$$v_{n+1}-v_n=x_{2n+3}-x_{2n+1}=\frac{1}{(2n+3)^2}-\frac{1}{(2n+2)^2}\prec 0$$

donc : (v_n) est décroissante.

Et on a

$$\lim_{n\to+\infty} v_n-u_n=\lim_{n\to+\infty} x_{2n+1}-x_{2n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=0$$

alors Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc convergentes et ont la même limite.

Exercice39 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ où $f(x)=\frac{1}{x+1}$

1)Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

2) on pose : $\alpha_n=u_{2n+1}$ et $\beta_n=u_{2n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que la suite (α_n) est croissante et que la suite (β_n) est décroissante

b) Montrer que : $\alpha_n\le\beta_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$

4) Montrer que $|u_{n+1}-u_n|\le\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

5) calculer : $\lim\alpha_n-\beta_n$

Solution :1) $f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}\prec 0$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

Donc f est décroissante Sur $\mathbb{R}^+$

2)on a : $\alpha_n=u_{2n+1}$ et $\beta_n=u_{2n}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $\alpha_{n+1}=(f\circ f)(\alpha_n)$ et $\beta_{n+1}=(f\circ f)(\beta_n)$

Et puisque f est décroissante Sur $\mathbb{R}^+$ et $f\left(\mathbb{R}^+\right)\subset\mathbb{R}^+$ alors : $f\circ f$ est croissante Sur $\mathbb{R}^+$

a)montrons que : $\alpha_n \le \alpha_n+1$ et $\beta_{n+1}\le\beta_n\ \forall n\in\mathbb{N}$

- pour n=0 on a : $\alpha_0=\frac{1}{2}\le\alpha_1=\frac{3}{5}$ et $\beta_1=\frac{2}{3}\le\beta_0=1$
- on suppose que : $\alpha_n\le\alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1}\le\beta_n$
- montrons que : $\alpha_{n+1}\le\alpha_{n+2}$ et $\beta_{n+2}\le\beta_{n+1}$?

on a : $\alpha_n\le\alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1}\le\beta_n$ et puisque $f\circ f$ est croissante Sur $\mathbb{R}^+$ alors :

$(f\circ f)(\alpha_n)\le(f\circ f)(\alpha_{n+1})$ et $(f\circ f)(\beta_{n+1})\le(f\circ f)(\beta_n)$

Donc : $\alpha_{n+1}\le\alpha_{n+2}$ et $\beta_{n+2}\le\beta_{n+1}$

Donc : $\alpha_n\le\alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1}\le\beta_n\ \forall n\in\mathbb{N}$

donc : (α_n) est croissante et la suite (β_n) est décroissante

b) Montrons que : $\alpha_n\le\beta_n\ \ \forall n\in\mathbb{N}$

- pour n=0 on a : $\alpha_0=\frac{1}{2}$ et $\beta_1=1$ donc : $\alpha_0\le\beta_0$
- on suppose que : $\alpha_n\le\beta_n$
- montrons que : $\alpha_{n+1}\le\beta_{n+1}$?

on a : $\alpha_n\le\beta_n$ et puisque $f\circ f$ est croissante Sur $\mathbb{R}^+$ alors : $(f\circ f)(\alpha_n)\le(f\circ f)(\beta_n)$

donc : $\alpha_{n+1}\le\beta_{n+1}$ donc : $\alpha_n\le\beta_n\ \ \forall n\in\mathbb{N}$

3) Montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ \frac{1}{2}\le u_n\le1$

Puisque : $\alpha_0\le\alpha_n\le\beta_n\le\beta_0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

Donc : $\frac{1}{2}\le u_{2n+1}\le u_{2n}\le1$

Donc : $\frac{1}{2}\le u_n\le1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

3) Montrons que : $|u_{n+1}-u_n|\le\frac{1}{n}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

- pour n=1 on a : $|u_2-u_1|=\frac{1}{6}$ donc : $|u_2-u_1|\le\frac{1}{1}$
- on suppose que : $|u_{n+1}-u_n|\le\frac{1}{n}$
- montrons que : $|u_{n+2}-u_{n+1}|\le\frac{1}{n+1}$?

on a : $|u_{n+2}-u_{n+1}|=\left|\frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}\right|$

$=\frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)}|u_{n+1}-u_n|$

Et on a : $\frac{1}{2}\le u_n\le1$ et $\frac{1}{2}\le u_{n+1}\le1$

Donc : $\frac{3}{2}\le1+u_n\le2$ et $\frac{3}{2}\le1+u_{n+1}\le2$

Donc : $\frac{1}{2}\le\frac{1}{u_{n+1}+1}\le\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2}\le\frac{1}{u_n+1}\le\frac{2}{3}$

Donc : $\frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)}\le\frac{4}{9}$ et $|u_{n+1}-u_n|\le\frac{1}{n}$

Donc : $\frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)}|u_{n+1}-u_n|\le\frac{4}{9n}$

Et on a : $\frac{1}{n+1}-\frac{4}{9n}=\frac{5n-4}{9n(n+1)}\succ0$ donc :

$\frac{4}{9n}\prec\frac{1}{n+1}$

Donc : $|u_{n+2}-u_{n+1}|\le\frac{1}{n+1}$

donc : $|u_{n+1}-u_n|\le\frac{1}{n}\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$

5)montrons que la suite (u_n) est convergente

Et déterminons la limite de la suite (u_n) ??

On a : $|u_{n+1}-u_n|\le\frac{1}{n}\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$

donc : $|u_{2n+1}-u_{2n}|\le\frac{1}{2n}\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$

donc : $|\alpha_n-\beta_n|\le\frac{1}{2n}\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$

et puisque : $\lim\frac{1}{2n}=0$ alors : $\lim\alpha_n-\beta_n=0$

Exercice40 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$u_1=1$ et $u_{n+1}=\frac{12u_n}{9+u_n^4}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad 1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$

2)Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Et en déduire sa convergence et sa limite

Solution :

On a : $u_1=1$ et $u_{n+1}=\frac{12u_n}{9+u_n^4}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad 1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$?

Soit la fonction f tel que : $f(x)=\frac{12x}{9+x^4}$

la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x)=12\frac{9+x^4-4x^4}{\left(9+x^4\right)^2}=36\frac{3-x^4}{\left(9+x^4\right)^2}=36\frac{\left(\sqrt{3}+x^2\right)\left(\sqrt{3}-x^2\right)}{\left(9+x^4\right)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $\sqrt{3}-x^2$

$$\sqrt{3}-x^2=\left(\sqrt{\sqrt{3}}-x\right)\left(\sqrt{\sqrt{3}}+x\right)$$

Donc : f est croissante sur $\left[-\sqrt{\sqrt{3}};\sqrt{\sqrt{3}}\right]$

Et f est décroissante sur $\left]-\infty;-\sqrt{\sqrt{3}}\right]$ et $\left[\sqrt{\sqrt{3}};+\infty\right[$

Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$

n=1 $u_1=1$ donc : $1\le u_1\le\sqrt{\sqrt{3}}$

supposons que : $1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$

montrons que : $1\le u_{n+1}\le\sqrt{\sqrt{3}}$

on a : $1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$

et puisque : f est croissante sur $I=\left[1;\sqrt{\sqrt{3}}\right]$

on a : $f(1)\le f(u_n)\le f\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)$ donc

$\frac{6}{5}\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$

donc : $1\le u_{n+1}\le\sqrt{\sqrt{3}}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

2)Etudions la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

$$u_{n+1}-u_n=\frac{12u_n}{9+u_n^4}-u_n=u_n\left(\frac{12}{9+u_n^4}-1\right)=u_n\left(\frac{3-u_n^4}{9+u_n^4}\right)$$

Puisque : $1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$ donc :

$0\prec u_n$ et $3-u_n^4\ge 0$ et $9+u_n^4\succ 0$

Donc : $u_{n+1}-u_n\ge 0$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante

Déduction de sa convergence et sa limite ?

la suite (u_n) est croissante et puisque (u_n)

majorée par $\sqrt{\sqrt{3}}$ alors :(u_n) est convergente.

Soit : $\lim u_n=l$ on a donc : $1\le l\le\sqrt{\sqrt{3}}$

Soit la fonction f tel que : $f(x)=\frac{12x}{9+x^4}$

On donc :

a) f est continue sur $I=\left[1;\sqrt{\sqrt{3}}\right]$

b) $f(I)=f\left(\left[1;\sqrt{\sqrt{3}}\right]\right)=\left[f(1);f\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)\right]$

$f(I)=\left[\frac{6}{5};\sqrt{\sqrt{3}}\right]\subset I$

c) $(\forall n\in\mathbb{N})(\ u_{n+1}=f(u_n))$

d) $u_0\in I$ e) (u_n) est convergente

Alors la limite l de la suite (u_n) vérifie l'équation :

$l=f(l)$ et $l\in I$

$l=f(l)\Leftrightarrow l=\frac{12l}{9+l^4}\Leftrightarrow 9+l^4=12\Leftrightarrow l^4=3$

donc : $l=\sqrt{\sqrt{3}}$ ou $l=-\sqrt{\sqrt{3}}$ et puisque : $l\in I$

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l=\sqrt{\sqrt{3}}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien