TD :LA DERIVATION –APPLICATIONS
Etude de fonctions

Exercice1 : Soit $f(x) = x\sqrt{x^2 - x}$

Etudier les variations de la fonction f

Solution : $D_f =]-\infty;0] \cup [1;+\infty[$

On a : $f(x) = x\sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 - x$

Et on a : $u(x) \succ 0 \quad \forall x \in D_f - \{0;1\}$

Donc f est dérivables sur $D_f - \{0;1\}$

$\forall x \in D_f - \{0;1\}$: $f'(x) = \left(x\sqrt{x^2 - x}\right)' = x'\sqrt{x^2 - x} + x\dfrac{\left(x^2 - x\right)'}{2\sqrt{x^2 - x}}$

$$f'(x) = \sqrt{x^2 - x} + x\frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} = \frac{4x^2 - 3x}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

Puisque : $2\sqrt{x^2 - x} \succ 0 \quad \forall x \in D_f - \{0;1\}$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $4x^2 - 3x$

Le tableau de signe de : $4x^2 - 3x$ est :

x	$-\infty$		0		$3/4$		$+\infty$
$4x^2-3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a : $f'(x) \succ 0 \quad \forall x \in]1;+\infty[$ et $\forall x \in]-\infty;0[$

donc f est strictement croissante sur $]4/3;+\infty[$

et sur $]-\infty;0[$

Exercice2 : Soit $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x$

Etudier les extremums de la fonction f

Solution : $D_f = \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x^2 + x - 2$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $x^2 + x - 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = 9$ deux solutions : $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$10/3$	$\searrow$	$-7/6$	$\nearrow$	$+\infty$

Du tableau de variation de f en deduit que :

f admet une valeur minimal relatif c'est $-7/6$ en 1

f admet une valeur maximal relatif c'est $10/3$ en -2

Exercice3 : Soient les fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ 2) $g(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$

3) $h(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$

Etudier les variations de ces fonctions et déterminer les extremums s'ils existent

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $3x - 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

f' s'annule en $1/3$ en changeant de signe à droite et à gauche alors f admet un extremum en $1/3$

Du tableau de variation de f en deduit que :

f Admet une valeur minimal absolue c'est $2/3$ en $1/3$ donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 2/3$

1) $D_g = \mathbb{R}$ g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

Puisque : $g'(x) \geq 0$ et g s'annule seulement en $x = 1$ alors la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et g n'admet pas d'extremums

3) $h(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2} \quad x \in D_h \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$D_h = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

Puisque h est une fonction rationnelle alors il dérivable sur D_h

$\forall x \in D_h$: $h'(x) = \dfrac{(2x+1)'(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)(x-1)'}{(x-1)^4}$

$h'(x) = \dfrac{3(x+1)}{(x-1)^3} = \dfrac{3}{(x-1)^2} \times \dfrac{x+1}{x-1}$

Puisque: $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$ $\dfrac{3}{(x-1)^2} \succ 0$ Le signe de $h'(x)$ est le signe de $\dfrac{x+1}{x-1}$

Donc voici le tableau de variation de h :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$h(x)$	-1	$\nearrow$	$-1/4$	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-1

h′ s'annule en -1 en changeant de signe à droite et à gauche alors f admet un extremum en -1

Du tableau de variation de f en deduit que :

f Admet une valeur maximal relative c'est $-1/4$ en -1

Exercice4 : Soit la fonction : $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x$

Montrer que f est majorée sur l'intervalle : $I_1 =]-\infty; 1]$ et minorée sur l'intervalle : $I_2 = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

et bornée sur l'intervalle : $I_3 = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6(2x^2 - x - 1) = 6(x-1)(2x+1)$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $(x-1)(2x+1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$7/4$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Du tableau de variation de f on a :

- f est croissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ et décroissante

sur $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ en deduit que f Admet une valeur maximal en $-\frac{1}{2}$ sur I_1 c'est $\frac{7}{4}$ donc :

$\forall x \in I_1$: $f(x) \leq \frac{7}{4}$ donc que f est majorée sur l'intervalle : $I_1 =]-\infty;1]$ par $\frac{7}{4}$

- f est décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ et croissante

sur $[1;+\infty[$ en deduit que f Admet une valeur minimal en 1 sur I_2 c'est -5 donc :

$\forall x \in I_2$: $-5 \leq f(x)$ donc que f est minorée sur l'intervalle : I_2 par -5

Exercice5 : Soit la fonction f définie sur $I=[0;\pi]$ par : $f(x)=\sin^2 x$ Étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur I

Solution : $\forall x \in [0;\pi]$

$$f'(x)=\left(\sin^2 x\right)' = 2(\sin x)'(\sin x)^{2-1} = 2\cos x \sin x$$

$$f'(x)=\sin 2x \Rightarrow f''(x)=2\cos 2x \quad \forall x \in [0;\pi]$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$$

Et $k \in \mathbb{Z}$ donc les solutions sont : $x=\frac{\pi}{4}$ et $x=\frac{3\pi}{4}$

$$x\in[0;\pi] \Rightarrow 2x \in [0;2\pi]$$

$2x$	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos 2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc :(C_f)est convexe sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

(C_f)est concave sur $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ et $A\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$et $B\left(\frac{3\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$sont les points d'inflexions de (C_f)

Exercice6 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\sqrt{x-x^2}$ 1)Déterminer D_f

2) montrer que la La droite (Δ): $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution :1) On a : $f(x)=\sqrt{x-x^2}$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x-x^2 \geq 0\right\}$$

$$x-x^2=0 \Leftrightarrow x(1-x)=0 \Leftrightarrow x=1 ou x=0$$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc : $D_f=[0,1]$

2)a) montrons que : si $x \in D_f=[0,1]$ alors $1-x \in D_f$?

$$x \in D_f=[0,1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 1-1 \leq 1-x \leq 1$$

Donc : $x \in D_f \Rightarrow 0 \leq 1-x \leq 1 \Rightarrow 1-x \in D_f$

b) montrons que : $f(1-x)=f(x)$????

$$f(1-x)=\sqrt{(1-x)-(1-x)^2}=\sqrt{1-x-\left(1-2x+x^2\right)}$$

$$=\sqrt{1-x-1+2x-x^2}=\sqrt{x-x^2}=f(x)$$

Donc : La droite (Δ): $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Exercice7 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\sin x-\cos x$. Montrer que le point $\Omega\left(\frac{\pi}{4};0\right)$ est un centre de symétrie de(C_f)

Solution : a) on a si $x\in\mathbb{R}$ alors $2\frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{2}-x\in\mathbb{R}$

b) montrons que : $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\times 0-f(x)$??

$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x-\sin x$

donc $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\times 0-f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

donc le point $\Omega\left(\frac{\pi}{4};0\right)$ est un centre de symétrie de $\left(C_f\right)$

Exercice8 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=x^2\sqrt{1+x}$

1. étudier la dérivabilité de f a droite en $x_0=-1$.

2. donner une interprétation géométrique

Solution : $D_f=[-1,+\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x}-0}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x}}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2\left(\sqrt{1+x}\right)^2}{(x+1)\sqrt{1+x}}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2(1+x)}{(x+1)\sqrt{1+x}}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

Donc f n'est pas dérivable a droite en $x_0=-1$.

2)Interprétation géométrique :

La courbe Cf admet une demi-tangente verticale à droite du point $A(-1;f(-1))$ dirigée vers le haut

Car : $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=+\infty$ ($+\times+=+$)

Exercice9 : soit f une fonction définie par :

$f(x)=2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) étudier les branches infinies de la courbe $\left(C_f\right)$

3) étudier la position de courbe $\left(C_f\right)$ avec son asymptote horizontal

4) étudier les variations de f et dresser le tableaux de variation de f

5) déterminer les points d'intersections de $\left(C_f\right)$ avec l'axe des abscisses f

6) montrer que la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $\left(C_f\right)$

7) tracer la courbe $\left(C_f\right)$

Solution : 1) $x\in D_f \Leftrightarrow x\neq 0$ et $x\neq 1$

donc : $D_f=]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

2) étude des branches infinies de la courbe $\left(C_f\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=2$

Car : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$

La droite (Δ): $y=2$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de $\pm\infty$

b) on a $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0}2-\frac{1}{x-1}=3$

donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$

donc La droite (Δ'): $x=0$ est une asymptote a la courbe C_f

c) on a $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-1}{x-1}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-1}{x-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1}2+\frac{1}{x}=3$

donc $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=+\infty$

donc La droite (Δ ''): $x=1$ est une asymptote a la courbe C_f 3) étude de la position de courbe $\left(C_f\right)$ avec son asymptote horizontal : $\left(\forall x\in D_f\right)$

$f(x)-2=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-x}{x(x-1)}=\frac{-1}{x(x-1)}$

si $x \in]0;1[$ alors $f(x) - 2 \succ 0$

Donc la courbe C_f est au- dessus de (Δ): $y = 2$

si $x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ alors $f(x) - 2 \prec 0$

Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ): $y = 2$

5) déterminons les points d'intersections de (C_f)

avec l'axe des abscisses : $(\forall x \in D_f)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{x(x-1)} = 0$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Donc les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses sont : $A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};0\right)$ et $B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};0\right)$

6) montrons que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f) :

On a : $D_f =]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

a) si $x \in D_f$ alors $1 - x \in D_f$ en effet :

$x \in \mathbb{R} - \{0;1\} \Rightarrow x \neq 0$ et $x \neq 1$

$\Rightarrow -x \neq 0$ et $-x \neq -1 \Rightarrow 1 - x \neq 1$ et $1 - x \neq 0$

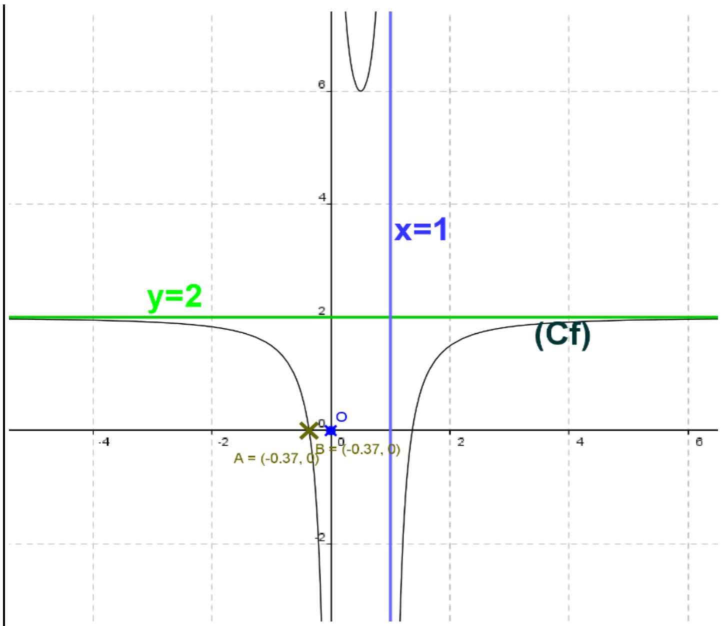
alors $1 - x \in \mathbb{R} - \{0;1\}$

b) montrons que : $f(1-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0;1\}$ ؟؟؟؟

$$f(1-x) = 2 + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x-1} = 2 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} = 2 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$$

donc $f(1-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0;1\}$

donc la droite $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f



Exercice10 : Soit f la fonction définie par :

$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

1)Déterminer D_f

2) Déterminer les limites aux bornes de D_f

3) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

4) étudier la dérivabilité de f adroite de 2 et à gauche de -1

5) étudier les variations de f et dresser le tableaux de variation de f

6) tracer la courbe (C_f)

Solution :1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x - 2 \geq 0\}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$

$x_1 = -1$ **et** $x_2 = 2$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f =]-\infty;-1] \cup [2;+\infty[$

2) on a : $\forall x\in D_f-\{0\}$

$$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$

Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

3) étude des branches infinies de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x-2}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x-2}-x\right)}{\sqrt{x^2-x-2}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-2}{\sqrt{x^2-x-2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y=x-\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x-2}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x-2}-x\right)}{\sqrt{x^2-x-2}-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-2}{\sqrt{x^2-x-2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1-\frac{2}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1}=\frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y=-x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

4) étudie de la dérivabilité de f adroite de 2 et à gauche de -1

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-x-2}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x-2}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x-2}}=+\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 2 et à gauche de -1

Alors la courbe Cf admet une demi-tangente verticale aux points $A(-1.0)$ et $B(2.0)$

5) étude des variations de f et le tableaux de variation de f ?

$x^2-x-2\succ0\Leftrightarrow\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

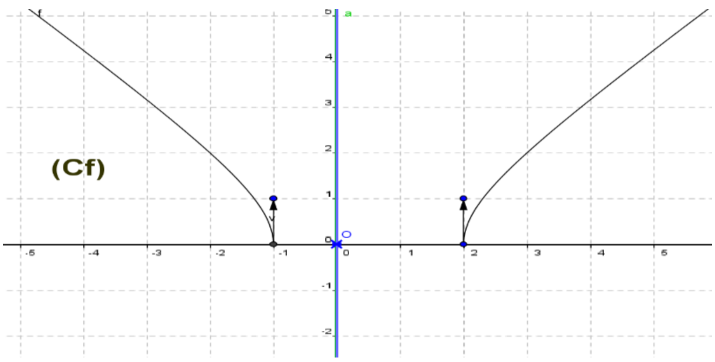
Donc : $f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)'=\frac{\left(x^2-x-2\right)'}{2\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$

$$f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}\quad\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2x-1$

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$				$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0		0	$\nearrow +\infty$

6) tracer la courbe (C_f)



Exercice11 : soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x-1+3\sqrt[3]{1-x};si...x\le1\\ f(x)=(x-1)\left(1+\arctan\frac{1}{x}\right);si...1\succ x\end{cases}$$

(C_f) La courbe de f dans un repére orthonormé

1)a)monter que f est continue en $x_0=1$

b) étudier la dérivabilité de f en $x_0=1$ et donner une Interprétation géométrique du résultat :

2)a) calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) monter que la courbe de f admet une asymptote oblique d´équation $(\Delta): y = x$ au voisinage de $+\infty$

c)Étudier les branches infinies de (C_f) au voisinage de $-\infty$

3)a)étudier les variations de f sur $I =]-\infty;1[$

b) donner le tableau de variation de f' sur $K = [1;+\infty[$ et en déduire les variations de f sur K

4) soit g la restriction de f sur $J =]-\infty;0]$

a)Montrer que g est une bijection de J vers un intervalle L que l'on déterminera

b) résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équations suivante : $t^3 - 3t - 2 = 0$ et déterminer : $g^{-1}(-2)$ et $(g^{-1})'(-2)$

c)Représenter (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans le même repére orthonormé.

Solution : on a $f(1) = 0$

1)a) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} (x-1)\left(1+\arctan\frac{1}{x}\right) = 0 = f(1)$

Donc f est continue à droite en $x_0 = 1$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} x-1+3\sqrt[3]{1-x} = 0 = f(1)$

Donc f est continue à gauche en $x_0 = 1$

Donc f est continue en $x_0 = 1$

• b) étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} 1+\arctan\frac{1}{x} = 1+\frac{\pi}{4}$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = 1$ et $f'_d(1) = 1+\frac{\pi}{4}$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet une demie tangente à droite de A(1, 0).de coefficient directeur $f'_d(1) = 1+\frac{\pi}{4}$

d'équation: $y = f(1) + f'_d(1)(x-1)$ avec $x \geq 1$

$y = 0+\left(1+\frac{\pi}{4}\right)(x-1) \Leftrightarrow (T_d): y = \left(1+\frac{\pi}{4}\right)(x-1)$ avec $x \geq 1$

• étude de la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{x-1+3\sqrt[3]{1-x}}{x-1} = \lim_{x\to1^-} 1+3\frac{\sqrt[3]{1-x}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^-} 1-3\sqrt[3]{\frac{1}{(1-x)^2}} = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $x_0 = 1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet une demie tangente vertical a gauche de A(1, 0)

2)a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x-1+3\sqrt[3]{1-x}$

$$= \lim_{x\to-\infty} x-1-3x\sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}} = \lim_{x\to-\infty} -1+x\left(1-3\sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}}\right)$$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 3\sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)\left(1+\arctan\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\arctan\frac{1}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\left(1+\arctan\frac{1}{x}\right)-x =$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\arctan\frac{1}{x}-1-\arctan\frac{1}{x}$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\frac{1}{x} = 0$ on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} x\arctan\frac{1}{x} = ??$

On pose : $t = \arctan\frac{1}{x}$ donc : $\tan t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\tan t}$

$x \to +\infty \Leftrightarrow t \to 0^{+}$

$$\lim_{x\to+\infty} x\arctan\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t} = 1$$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$

Donc :la courbe de f admet une asymptote oblique d´équation $(\Delta): y = x$ au voisinage de $+\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{x} - 3\sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^{3}}} = 1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} -1 + 3\sqrt[3]{1-x} = +\infty$

la courbe de f admet une branche parabolique dans la direction de la droite $(\Delta): y = x$ au voisinage de $-\infty$

3)a)étude des variations de f sur $I =]-\infty;1[$

On a : $f(x) = x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x}$ si $x \prec 1$ est dérivable sur $I =]-\infty;1[$ (la somme de fonctions dérivables) sur I

$\forall x \in]-\infty;1[$ $f'(x) = 1 + 3\times\frac{1}{3}(1-x)'(1-x)^{-\frac{2}{3}} = 1 - (1-x)^{-\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{(1-x)^{2}} - 1}{\sqrt[3]{(1-x)^{2}}}$ et puisque : $\sqrt[3]{(1-x)^{2}} \succ 0$

$\forall x \in]-\infty;1[$ le signe de $f'(x)$ est celui de : $\sqrt[3]{(1-x)^{2}} - 1$

$\sqrt[3]{(1-x)^{2}} \geq 1 \Leftrightarrow (1-x)^{2} \geq 1 \Leftrightarrow (1-x)^{2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -x(2-x) \geq 0$

TV :de variations de f

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

b)on a f est dérivable sur $K = [1;+\infty[$ (la somme de fonctions dérivables sur K)

$\forall x \in K = [1;+\infty[$ $f'(x) = 1 + \arctan\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^{2}+1}$

donc f' est dérivable sur K(la somme de fonctions dérivables sur K)

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^{2}}}{1+\frac{1}{x^{2}}} + \frac{x^{2}-2x-1}{(x^{2}+1)^{2}} = \frac{-(2x+1)}{(x^{2}+1)^{2}} \prec 0 \quad \forall x \in K = [1;+\infty[$$

donc f' est décroissante sur K

et puisque f' est continue sur K alors :

$f'(K) = \left]\lim_{x\to+\infty} f'; f'(1)\right] = \left]1;1+\frac{\pi}{4}\right]$ donc $f'(x) \succ 0$

$\forall x \in K = [1;+\infty[$ donc f est croissante sur K

Le tableau de variation de f' sur $K = [1;+\infty[$ est :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4)a)on a : $g(x) = f(x) = x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x}$ $\forall x \in J$

D’après les questions précédentes on a g est continue et strictement croissante sur J alors

g est une bijection de J vers un l’intervalle

$K = g(J) = \left]\lim_{x\to-\infty} g; g(0)\right] =]-\infty;2]$

b)on a t=2 est une solution de l’équation :

$t^{3} - 3t - 2 = 0$ la division euclidienne donne :

$t^{3} - 3t - 2 = (t-2)(t+1)^{2}$ une solution de l’équation : $t^{3} - 3t - 2 = 0$ dans $\mathbb{R}^{+}$ est $S = \{2\}$

on pose : $g^{-1}(-2) = x \Leftrightarrow -2 = g(x)$ et $x \in J$

donc : $x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x} = -2$ et $x \in J$

on pose : $t = \sqrt[3]{1-x}$ donc : $t^{3} - 3t - 2 = 0$ et $t \geq 1$

D'après les questions précédentes : $t=2$

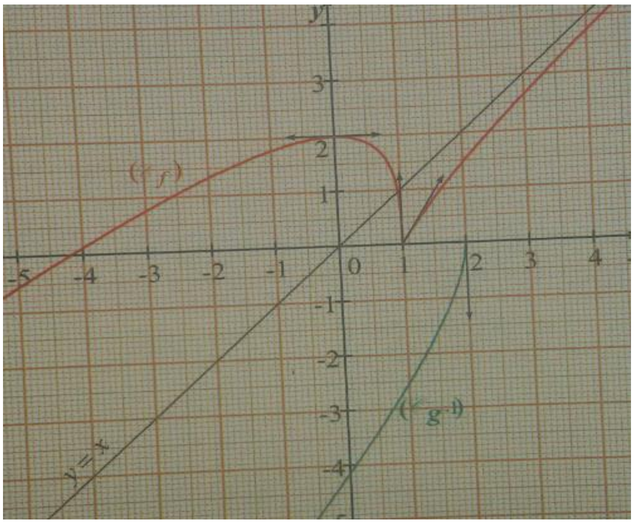
Donc : $x=1-t^3=-7$ donc : $g^{-1}(-2)=-7$

Et puisque : $g'(-7)\neq 0$ alors on a :

$$\left(g^{-1}\right)'(-2)=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(-2)\right)}=\frac{1}{g'(-7)}$$

Et puisque : $g'(x)=1-\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

Alors : $g'(-7)=\frac{3}{4}$ donc : $\left(g^{-1}\right)'(-2)=\frac{4}{3}$



Exercice12 : soit f une fonction définie par :

$$f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer que f est périodique de période $T=\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f

4) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}$

2)a)si $x\in\mathbb{R}$ alors $\pi+x\in\mathbb{R}$

b) $f(\pi+x)=2\cos\left(2(\pi+x)+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(2x+2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$$f(\pi+x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T=\pi$

<u>Remarque :</u> la fonction : $x\rightarrow\cos(ax+b)$ est périodique de période $T=\frac{2\pi}{|a|}$ si $a\neq 0$

<u>Un domaine d'étude de f</u>

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T=\pi$ donc par exemple : $D_E=[0;\pi]$

3) $f'(x)$ et le tableaux de variation de f ?

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$ on a :

$$f'(x)=2\times -2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-4\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E=[0;\pi]$

$$x\in[0;\pi]\Leftrightarrow 0\leq x\leq\pi\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}\leq 2x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{9\pi}{4}$$

On utilisant le cercle trigo en deduit le signe de $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.Le tableau de signe de $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ est :

$2x+\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$		π		2π		$\frac{9\pi}{4}$
$\sin(2x+\frac{\pi}{4})$		+	0	−	0	+	

le tableau de variation de f :

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{8}$		π
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	$\sqrt{2}$	↘	-2	↗	2	↘	$\sqrt{2}$

4) du tableau de variation de f :on deduit que f change de signe n sur les intervalles $\left[0;\frac{3\pi}{8}\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{8};\frac{7\pi}{8}\right]$ cad (C_f) coupe l'axe des abscisses

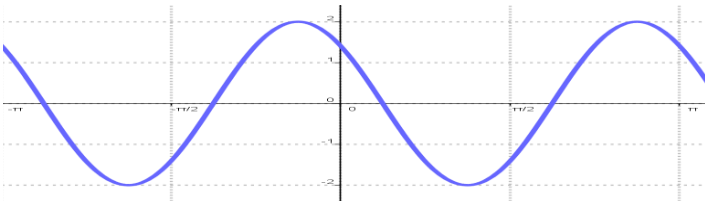
On va résoudre dans $I=\left[0;\frac{7\pi}{8}\right]$ l'équation : $f(x)=0$

On a : $\begin{cases} f(x)=0 \\ x\in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ \frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{9\pi}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} ou 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2} \\ x\in I \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8} ou . x=\frac{5\pi}{8}$

On trace la courbe (C_f) sur l'intervalle $D_E=[0;\pi]$

Et on deduit le reste par les translations de vecteurs $k\pi\vec{i}\quad k\in\mathbb{Z}$



Exercice13 : soit f une fonction définie par :

$f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0;\pi]$

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f

4) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}$ car $2+\cos x\neq 0\quad\forall x\in\mathbb{R}$

2) <u>Un domaine d'étude de</u> f

a)si $x\in\mathbb{R}$ alors $2\pi+x\in\mathbb{R}$

) $f(2\pi+x)=\frac{\sin(2\pi+x)}{2+\cos(2\pi+x)}=\frac{\sin x}{2+\cos x}=f(x)$

Donc : f est périodique de période $T=2\pi$

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T=2\pi$ donc par exemple : $D=[-\pi;\pi]$

Etudions la parité de f ?

$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)}=-\frac{\sin x}{2+\cos x}=-f(x)$ Donc f est impair

Donc il suffit d'étudier f sur $D_E=[0;\pi]$

3) f est dérivable sur $D_E=[0;\pi]$ et $\forall x\in D_E$

on a :

$f'(x)=\frac{\cos x(2+\cos x)+\sin x\times\sin x}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$

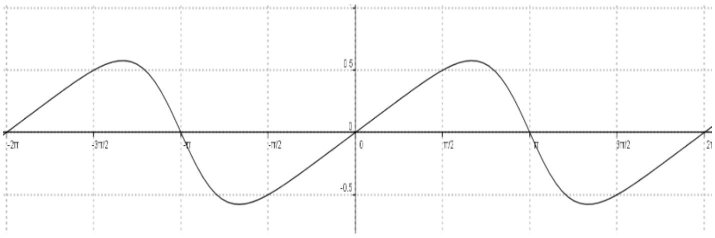
Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E=[0;\pi]$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2\cos x+1$

$2\cos x+1\ge 0\Leftrightarrow\cos x\ge-\frac{1}{2}$ Et $x\in[0;\pi]$ Donc :

$2\cos x+1\ge 0\Leftrightarrow x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0



Exercice14 : soit f une fonction définie par :

$f(x)=4\sin x+\cos 2x$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer que f est périodique de période $T=2\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f

4)donner l'équation de la tangente (T) a la courbe de f en en $x_0=0$

5) calculer $f''(x)$ en fonction de $\sin x$

6)déterminer les points d'inflexions de la courbe(C_f)

7) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi;4\pi]$

Solution :1) $D_f = \mathbb{R}$

2)a)si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\pi + x \in \mathbb{R}$

b) $f(2\pi + x) = 4\sin(x+2\pi) + \cos(2(x+2\pi))$

$$f(2\pi + x) = 4\sin x + \cos(2x) = f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T = 2\pi$

Un domaine d'étude de f

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T = 2\pi$

donc par exemple : $D_E = [0;2\pi]$

f est dérivable sur $D_E = [0;2\pi]$ et $\forall x \in D_E$

on a : $f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x) = 4\cos x - 4\cos x \sin x$

$$f'(x) = 4\cos x(1-\sin x)$$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0;2\pi]$

On a : $1 - \sin x \geq 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(1-\sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0.ou.1 - \sin x = 0$

$1 - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ Donc :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	1

4) l'équation de la tangente (T) a la courbe de f

en en $x_0 = 0$ est : $y = f(0) + f'(0)(x-0)$

Avec : $f'(0) = 4$ et $f(0) = 1$ donc : $y = 4x + 1$

5) calcule de $f''(x)$ en fonction de $\sin x$:

On a $f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x)$ Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = -4\sin x - 4\cos(2x) = -4\sin x - 4(1 - 2\sin^2 x)$$

$$f''(x) = 8\sin^2 x - 4\sin x - 4 = 4(\sin^2 x - \sin x - 1)$$

Etude du signe de $f''(x)$ sur $D_E = [0;2\pi]$

On pose : $X = \sin x$ donc : $X \in [-1;1]$ et l'équation

$\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ devient : $X^2 - X - 1 = 0$

$\Delta = 9$ les solutions sont : $X_1 = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = 1$

Donc : $f''(x) = 8(\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)$

On a : $\sin x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En utilisant le cercle trigo en deduit que :

$$\sin x + \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]$$

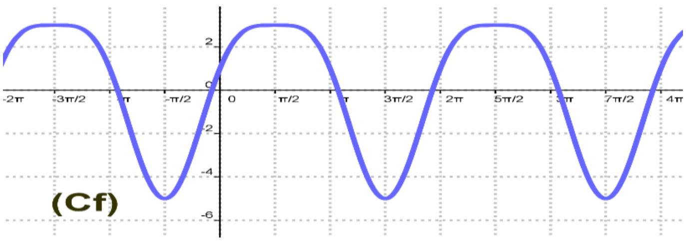
x	0		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc :(C_f)est convexe sur $\left[\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]$

(C_f)est concave sur $\left[0,\frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6};2\pi\right]$ et $A\left(\frac{7\pi}{6},-\frac{3}{2}\right)$

et $B\left(\frac{11\pi}{6},-\frac{3}{2}\right)$sont les points d'inflexions de (C_f)

7) La courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi;4\pi]$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien