

## FONCTIONS EXPONENTIELLES

**Exercice1 :** Résoudre les équations et inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

$$1) \exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) \quad 2) \exp(2x+1) \leq \exp\left(\frac{6}{x}\right)$$

**Solution :1)**  $\ln(x-2) = 0$

a) cette équation est définie ssi :  $2x+3 \neq 0$  et

$$x-1 \neq 0 \text{ donc : } x \neq -\frac{3}{2} \text{ et } x \neq 1 \text{ donc : } D_E = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}; 1\right\}$$

b) Résoudre l'équation :

$$\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) \Leftrightarrow \frac{x+5}{2x+3} = \frac{1}{x-1}$$

$$(x+5)(x-1) = 2x+3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-8) \times 1 = 4 + 32 = 36 > 0$$

$$x_1 = \frac{-2+6}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-2-6}{2 \times 1} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\text{Donc : } S = \{-4; 2\}$$

$$2) \exp(2x+1) \leq \exp\left(\frac{6}{x}\right)$$

a) cette inéquation est définie ssi :  $x \neq 0$  donc :  $D_I = \mathbb{R}^*$

$$2) \exp(2x+1) \leq \exp\left(\frac{6}{x}\right) \Leftrightarrow 2x+1 \leq \frac{6}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + x - 6}{x} \leq 0$$

| $x$        | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $3/2$ | $+\infty$ |
|------------|-----------|------|-----|-------|-----------|
| $2x^2+x-6$ | $-$       | $0$  | $+$ | $+$   | $0$       |
| $x$        | $-$       | $-$  | $0$ | $+$   | $+$       |
| $q(x)$     | $+$       | $0$  | $-$ | $+$   | $0$       |

$$S = ]-\infty, -2] \cup \left]0, \frac{3}{2}\right]$$

**Exercice2 :** Résoudre les équations et inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

$$1) e^{1-x} \times e^{2x} = e \quad 2) \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1}$$

$$3) e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \quad 4) e^{x^2} \cdot (e^x)^3 = (e^{-x})^5 \cdot e^{-7}$$

$$5) e^{2x-3} - (e+1)e^{x-2} + 1 < 0$$

**Solution :1)**  $e^{1-x} \times e^{2x} = e \Leftrightarrow e^{2x+1-x} = e^1$

$$\Leftrightarrow e^{x+1} = e^1 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0 \text{ donc : } S = \{0\}$$

$$2) \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1} \Leftrightarrow e^{(2-x)-(1+2x)} = e^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow (2-x) - (1+2x) = x-1 \Leftrightarrow -4x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$3) e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 6 = 0 \text{ on pose : } e^x = X$$

$$\text{Donc : } X^2 - 5X + 6 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$X_1 = \frac{5+1}{2 \times 1} = 3 \text{ et } X_2 = \frac{5-1}{2 \times 1} = 2 \text{ donc : } x_1 = \ln 3 \text{ et } x_2 = \ln 2$$

$$\text{Donc : } e^{x_1} = 3 \text{ et } e^{x_2} = 2 \text{ donc : } x_1 = \ln 3 \text{ et } x_2 = \ln 2$$

$$\text{Donc : } S = \{\ln 2, \ln 3\}$$

4) cette équation est définie dans  $\mathbb{R}$

$$e^{x^2} \cdot (e^x)^3 = (e^{-x})^5 \cdot e^{-7} \Leftrightarrow e^{x^2} \cdot e^{3x} = e^{-5x} \cdot e^{-7}$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2+3x} = e^{-5x-7} \Leftrightarrow x^2 + 3x = -5x - 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 7 \times 1 = 64 - 28 = 36 > 0$$

$$x_1 = \frac{-8+6}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-8-6}{2 \times 1} = \frac{-14}{2} = -7$$

Donc :  $S = \{-7; -1\}$

5) cette équation est définie dans  $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow e^{-3} (e^{2x} - (e+1)e^{x+1} + e^3) < 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - (e+1)e^{x+1} + e^3 < 0 \text{ car } e^{-3} > 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - (e^2 + e)e^x + e^3 < 0$$

On pose :  $e^x = t$  on aura :  $t^2 - (e^2 + e)t + e^3 < 0$

$$t^2 - (e^2 + e)t + e^3 = (t - e)(e^x - e^2)$$

$$2) e^{2x-3} - (e+1)e^{x-2} + 1 < 0 \Leftrightarrow (e^x - e)(e^x - e^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x - e^1)(e^x - e^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in ]1; 2[ \text{ donc : } S = ]1; 2[$$

**Exercice3 :** Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x + 4} \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 e^{-\sqrt{-x}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$$

**Solution : 1)**  $\frac{e^x}{x^2 + 3x + 4} = \frac{e^x}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{e^x}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}$

Et on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} = 1$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x + 4} = +\infty$

2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 e^{-\sqrt{-x}}$  on pose :  $t = \sqrt{-x}$

donc  $x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 e^{-\sqrt{-x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t^{10} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{t^{10}}{e^t} = 0$$

3) on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x} = 1 \times 1 = 1$

Car :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} = 1$  (on pose :  $t = \sin x$ ) et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

4) On pose :  $f(x) = e^{x+1}$  donc :  $f(0) = e^{0+1} = e^1 = e$

Et :  $f'(x) = (x+1)' e^{x+1} = 1e^{x+1} = e^{x+1}$  et  $f'(0) = e$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = e$

**Exercice4 :** Déterminer les dérivées des fonctions

suivantes : 1)  $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$

2)  $g(x) = e^{-2x^2} - 3e^{3x+1}$  3)  $h(x) = e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

4)  $f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$

**Solutions :** 1)  $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$

la fonction :  $u_1 : x \rightarrow \sqrt{2x+1}$  est dérivable sur

$$\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[ \text{ et } u_1'(x) = \frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

Donc la fonction  $f$  est dérivable sur

$$\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[ \text{ et } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} e^{\sqrt{2x+1}}$$

2)  $g(x) = e^{-2x^2} - 3e^{3x+1}$  les fonctions:

$u_1 : x \rightarrow -2x^2$  et  $u_2 : x \rightarrow 3x+1$  sont dérivables

sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$u_1'(x) = -4x \text{ et } u_2'(x) = 3$$

Donc la fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

et  $g'(x) = -4xe^{-2x^2} - 9e^{3x+1}$

3)  $h(x) = e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

la fonction :  $u : x \rightarrow \frac{x+1}{-x+3}$  est dérivable sur

$$]3; +\infty[ \text{ et } ]-\infty; 3[ \text{ et } u'(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$$

Donc la fonction  $f$  est dérivable sur  $]3; +\infty[$  et

$$]-\infty; 3[ \text{ et } h'(x) = \frac{4}{(x-3)^2} e^{\frac{x+1}{-x+3}}$$

$$4) f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$$

$$f'(x) = ((e^x - 4)\sqrt{e^x - 1})' = ((e^x - 4))' \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4)(\sqrt{e^x - 1})'$$

$$f'(x) = e^x \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) \frac{(e^x - 1)'}{2\sqrt{e^x - 1}} = e^x \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x - 1) + e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{2e^{2x} - 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{3e^{2x} - 6e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

**Exercice5 :** Déterminer les primitives des

fonctions suivantes : 1)  $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$  3)

$$g(x) = (e^x)^2$$

$$3) h(x) = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} \quad \text{Solutions : 1) } f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \text{ Si}$$

on pose :  $u(x) = \sqrt{x}$  On a :

$$f(x) = 2u'(x)e^{u(x)} \text{ si } x > 0 \text{ donc}$$

les primitives de  $f$  sont :

$$F(x) = 2e^{u(x)} + \lambda = 2e^{\sqrt{x}} + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$2) g(x) = (e^x)^2 \text{ Si on pose : } u(x) = e^x$$

On a :  $g(x) = u'(x)u(x)$  donc les primitives de  $g$

$$\text{sont : } G(x) = \frac{1}{2}u^2(x) + \lambda = \frac{1}{2}(e^x)^2 + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$3) h(x) = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} \text{ Si on pose : } u(x) = \arctan x$$

On a :  $h(x) = u'(x)e^{u(x)}$  donc les primitives de  $h$

$$\text{sont : } H(x) = e^{\arctan x} + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

**Exercice6 :** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$1) I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$$

$$2) I = ]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$3) I = \mathbb{R}; f(x) = e^x (e^x - 1)^3$$

$$4) I = [0; \pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x}$$

$$5) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \quad I = ]0; +\infty[$$

**Solutions :** 1)  $I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$

$$f(x) = 2e^{3x} - e^{-x} = \frac{2}{3}(3x)' e^{3x} + (-x)' e^{-x}$$

$$F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} + e^{-x} \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I$$

$$2) I = ]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} = \frac{1}{2} \frac{(e^{2x} - 1)'}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$\text{Donc : } F(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{e^{2x} - 1} \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I$$

$$3) I = \mathbb{R}; f(x) = e^x (e^x - 1)^3$$

$$f(x) = e^x (e^x - 1)^3 = (e^x - 1)' (e^x - 1)^3$$

$$\text{donc : } F(x) = \frac{1}{3+1} (e^x - 1)^{3+1} = \frac{1}{4} (e^x - 1)^4 \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I$$

$$4) I = [0; \pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x}$$

$$f(x) = \sin x e^{\cos x} = -(\cos x)' e^{\cos x}$$

$$\text{donc : } F(x) = e^{\cos x} \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I$$

$$5) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \quad I = ]0; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{(e^x - x)'}{e^x - x} \text{ donc : } F(x) = \ln|e^x - x| \text{ est}$$

une primitive de  $f$  sur  $I$

**Exercice7 :** Considérons la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = (x-1)e^x$$

1) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

2) Etudier les branches infinies de la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

3) Etudier la concavité de la courbe  $C_f$

4) Construire la courbe  $C_f$ .

**Solution :** 1)  $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

Donc :  $y = 0$  est une asymptote à  $(C)$  au voisinage de  $-\infty$

$$f'(x) = ((x-1)e^x)' = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)'$$

$$f'(x) = 1e^x + (x-1)e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

Le signe de :  $f'(x)$  est celui de  $x$

Tableau de variation :

|         |           |      |           |
|---------|-----------|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$       |
| $f(x)$  | $0$       | $-1$ | $+\infty$ |

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} e^x$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ donc :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} e^x = 1 \times (+\infty) = +\infty$$

Donc : la courbe  $C_f$  admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de  $+\infty$

3) Etude de la concavité de la courbe  $C_f$  :

$$f''(x) = (xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x(1+x)$$

Le signe de :  $f''(x)$  est celui de :  $x+1$

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

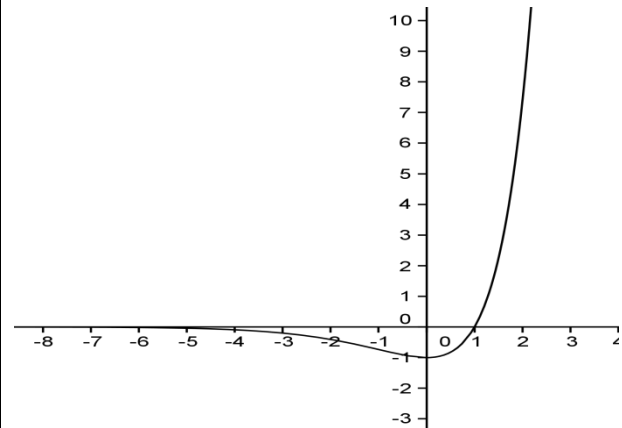
|       |           |      |           |
|-------|-----------|------|-----------|
| $x$   | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $x+1$ | $-$       | $0$  | $+$       |

Donc :

$(C_f)$  est convexe sur  $[-1; +\infty[$

$(C_f)$  est concave sur  $] -\infty; -1]$  et  $A(-1, -2e^{-1})$  est un point d'inflexion de  $(C_f)$

4)



**Exercice8 :** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{par : } f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1}$$

1) déterminer  $D_f$  et calculer les limites aux

bornes de  $D_f$

2) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

3) montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$

4) Etudier les branches infinies de la courbe  $C_f$  Et étudier la position de la courbe  $C_f$  avec les asymptotes obliques

**Solutions :**

$$1) D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x + 1 \neq 0\}$$

$$e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -1 \text{ pas de solutions car } e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc : } D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 3$$

$$2) f'(x) = \left( x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} \right)' = 1 - 3 \frac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = 1 - 3 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)^2 - 3e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x)^2 + 2e^x + 1 - 3e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x)^2 - e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$$

Le signe de :  $f'(x)$  est celui de :  $(e^x)^2 - e^x + 1$

On pose :  $e^x = X$  donc on a :  $X^2 - X + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$$

Donc :  $X^2 - X + 1 > 0$  (signe de a)

Donc :  $(e^x)^2 - e^x + 1 > 0$  par suite :  $f'(x) > 0$

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

3) montrons que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$

$$f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} = x + 2 - 3 + \frac{3}{e^x + 1}$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{-3(e^x + 1) + 3}{e^x + 1} = x + 2 + \frac{-3e^x - 3 + 3}{e^x + 1}$$

$$f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$$

4) Etude des branches infinies ?

a) On a  $f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1}$  donc  $f(x) - (x - 1) = \frac{3}{e^x + 1}$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 0$$

Par suite : la droite d'équation  $(\Delta) y = x - 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage

de  $+\infty$  et on a aussi :  $f(x) - (x - 1) = \frac{3}{e^x + 1} > 0$

Donc : la courbe  $C_f$  est au-dessus de la droite d'équation  $(\Delta) y = x - 1$

b) On a  $f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$  donc  $f(x) - (x + 2) = -\frac{3e^x}{e^x + 1}$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3e^x}{e^x + 1} = 0$$

Par suite : la droite d'équation  $(D) y = x + 2$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage

de  $-\infty$  et on a aussi :  $f(x) - (x + 2) = -\frac{3e^x}{e^x + 1} < 0$

Donc : la courbe  $C_f$  est au-dessous de la droite d'équation  $(D) y = x + 2$

**Exercice 9 :** Considérons la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$$

1) déterminer  $D_f$  et calculer les limites aux

bornes de  $D_f$

2) montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+) \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$

3) Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

4) montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+) f'(x) = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}}$

5) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

6) Etudier les branches infinies de la courbe  $C_f$  Au voisinage de  $+\infty$

7) calculer :  $f(2 \ln 2)$  et construire la courbe  $C_f$ .

**Solutions :** 1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x - 1 \geq 0\}$

$$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \ln 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Donc :  $D_f = \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1} = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 4 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x - 1} = +\infty$$

$$2) \frac{f(x)}{x} = \frac{(e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}}{x} = \frac{(e^x - 4)(\sqrt{e^x - 1})^2}{x\sqrt{e^x - 1}}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(e^x - 4)(e^x - 1)}{x\sqrt{e^x - 1}} = \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \text{ puisque : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - 4 = -3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{e^x - 1} = 0^+$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

Donc la fonction  $f$  n'est pas dérivable à droite de 0

*Interprétation géométriquement :*

la courbe  $C_f$  admet une demi tangente vertical adroite du point  $O(0;0)$  dirigé vers le bas

$$\text{car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty \quad (+) \times (-) = (-)$$

$$4) \text{ montrons que : } (\forall x \in \mathbb{R}_*^+) f'(x) = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}} ?$$

$$f'(x) = ((e^x - 4)\sqrt{e^x - 1})' = (e^x - 4)' \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4)(\sqrt{e^x - 1})'$$

$$f'(x) = e^x \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) \frac{(e^x - 1)'}{2\sqrt{e^x - 1}} = e^x \sqrt{e^x - 1} + \frac{e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(\sqrt{e^x - 1})^2 + e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{2e^x(e^x - 1) + e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{3e^{2x} - 6e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

5) le signe de :  $f'(x)$  est celui de  $e^x - 2$

$$\text{car } \frac{3e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}_*^+)$$

$$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$$

$$f(\ln 2) = (e^{\ln 2} - 4)\sqrt{e^{\ln 2} - 1} = (2 - 4)\sqrt{2 - 1} = -2$$

|         |   |         |           |
|---------|---|---------|-----------|
| $x$     | 0 | $\ln 2$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | -       | +         |
| $f(x)$  | 0 | -2      | $+\infty$ |

6) Etude des branches infinies de la courbe  $C_f$   
Au voisinage de  $+\infty$  ?

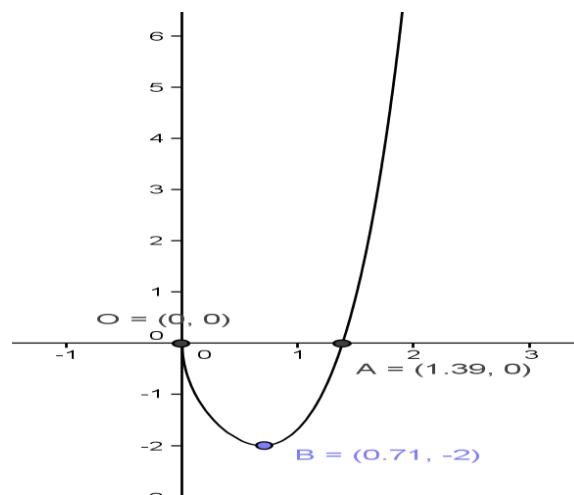
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{x} - \frac{4}{x} \right) \sqrt{e^x - 1}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x - 1} = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ Donc : la courbe } C_f \text{ admet}$$

une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de  $+\infty$

$$f(2\ln 2) = (e^{2\ln 2} - 4)\sqrt{e^{2\ln 2} - 1} = (e^{\ln 4} - 4)\sqrt{e^{\ln 4} - 1} = (4 - 4)\sqrt{4 - 1} = 0$$



**Exercice10 ::** Considérons la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}$

1) déterminer  $D_f$  et calculer les limites aux bornes de  $D_f$

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

3) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

4) construire la courbe  $C_f$ .

**Solutions : 1)**  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^{-x} - e^{-2x} \geq 0\}$

$$e^{-x} - e^{-2x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq e^{-2x} \Leftrightarrow -x \geq -2x \Leftrightarrow x \geq 0$$

Donc :  $D_f = [0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}} = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$$

$$2) a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}} = 0 = f(0)$$

Donc  $f$  est continue à droite de 0

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{e^{-x}(1 - e^{-x})}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{e^{-x}}{x} \times \frac{e^{-x} - 1}{-x}} \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

Donc la fonction  $f$  n'est pas dérivable à droite de 0

*Interprétation géométriquement :*

la courbe  $C_f$  admet une demi tangente vertical adroite du point  $O(0;0)$  dirigé vers le haut

$$\text{car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \quad (+) \times (+) = (+)$$

3) Etude des variations de  $f$  :

$$f'(x) = \left( \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}} \right)' = \frac{(e^{-x} - e^{-2x})'}{2\sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} + 2e^{-2x}}{2\sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}} = \frac{e^{-x}(2e^{-x} - 1)}{2\sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}}$$

le signe de :  $f'(x)$  est celui de  $2e^{-x} - 1$

$$\text{car } \frac{e^{-x}}{2\sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}} > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}_*)$$

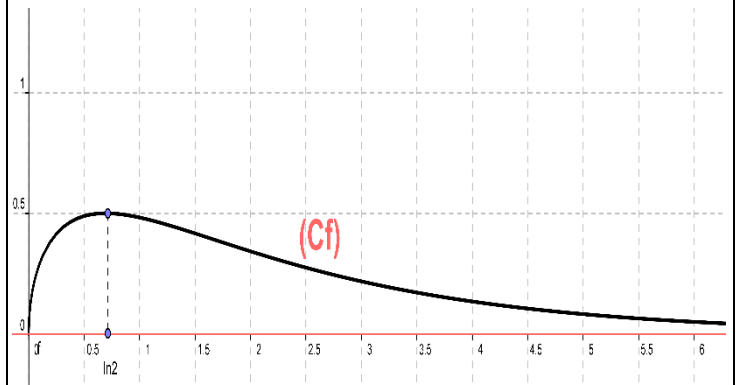
$$\text{on a : } 2e^{-x} - 1 = \frac{1}{e^x}(2 - e^x)$$

$$2 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow x < \ln 2$$

$$f(\ln 2) = \sqrt{e^{-\ln 2} - e^{-2\ln 2}} = \sqrt{\frac{1}{e^{\ln 2}} - \frac{1}{e^{2\ln 2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

| $x$     | 0 | $\ln 2$                 | $+\infty$ |
|---------|---|-------------------------|-----------|
| $f'(x)$ | + | 0                       | -         |
| $f(x)$  | 0 | $\nearrow 1/2 \searrow$ | 0         |

4) la courbe  $C_f$  :



**Exercice 11 :** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{par : } f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

1) déterminer  $D_f$  et calculer les limites aux bornes de  $D_f$

2) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

3) montrer que  $f$  admet une fonction réciproque définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera

4) déterminer :  $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

$$\textbf{Solutions : } f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - e^{2x} > 0\}$$

$$1 - e^{2x} > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{2x} \Leftrightarrow e^0 > e^{2x} \Leftrightarrow 0 > 2x \Leftrightarrow x < 0$$

$$\text{Donc : } D_f = ]-\infty, 0[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} = \frac{0}{\sqrt{1 - 0}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} \left( \frac{1}{e^{2x}} - 1 \right)}} = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{e^{2x} \left( \frac{1}{e^{2x}} - 1 \right)} = 0^+$$

$$2) f'(x) = \left( \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \right)' = \frac{(e^x)' \sqrt{1-e^{2x}} - e^x (\sqrt{1-e^{2x}})'}{(\sqrt{1-e^{2x}})^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \sqrt{1-e^{2x}} - e^x \frac{(1-e^{2x})'}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{(\sqrt{1-e^{2x}})^2} = \frac{2e^x(1-e^{2x}) + 2e^x e^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}^3}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x - 2e^{3x} + 2e^{3x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}(1-e^{2x})} = \frac{2e^x}{2\sqrt{1-e^{2x}}(1-e^{2x})} > 0$$

$$\forall x \in ]-\infty, 0[$$

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$       |
| $f'(x)$ | $+$       |           |
| $f(x)$  | $0$       | $+\infty$ |

3) on a  $f$  est une fonction continue et strictement

croissante sur  $I = ]-\infty, 0[$  donc  $f$  admet une

fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur l'intervalle

$$J = f(I) = f(]-\infty, 0[) = ]0; +\infty[$$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}} = x \\ y \in ]-\infty, 0[ \end{cases} \Leftrightarrow \left( \frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}} \right)^2 = x^2 \Leftrightarrow \frac{e^{2y}}{1-e^{2y}} = x^2$$

$$e^{2y} = x^2(1-e^{2y}) \Leftrightarrow e^{2y} = x^2 - x^2 e^{2y} \Leftrightarrow e^{2y} + x^2 e^{2y} = x^2$$

$$e^{2y}(1+x^2) = x^2 \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow 2y = \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y = \ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

$$\text{Donc : } f^{-1}(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \quad \forall x \in ]0; +\infty[$$

**Exercice 12 :** Considérons la fonction  $f$  définie sur

$\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$  et soit  $(C)$  la courbe

De  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  avec

$$\|\vec{i}\| = 2cm$$

1)a) montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  et interpréter géométriquement le résultat

b) montrer que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2)a) vérifier que :  $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = x + 1 - \ln(1 + e^x)$

b) en déduire la droite  $(D)$  d'équation :  $y = x + 1$

est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$

c) étudier la position de la courbe  $C_f$  avec la droite  $(D)$

3)a) montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = \frac{1}{1+e^x}$

b) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

c) Etudier la concavité de  $C_f$

d) montrer que la courbe  $C_f$  coupe l'axe des abscisses en un point à déterminer

4) Construire la courbe  $C_f$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

5) a) montrer que  $f$  admet une fonction réciproque définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera

b) déterminer :  $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

**Solutions :**  $f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$

1)a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln(1 + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Interprétation géométriquement :

$y=1$  est une asymptote a(C) au voisinage de  $+\infty$

$$1)b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = -\infty$$

Car:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

2)a) Montrons que:  $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = x+1 - \ln(1+e^x)$  ?

$$f(x) = 1 - \ln(1+e^{-x}) = 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1 - \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right)$$

$$f(x) = 1 - \ln(e^x + 1) + \ln(e^x) = 1 - \ln(e^x + 1) + x$$

Donc:  $f(x) = x+1 - \ln(e^x + 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2)b) on a :  $f(x) = x+1 - \ln(e^x + 1)$

Donc :  $f(x) - (x+1) = -\ln(e^x + 1)$

Donc:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln(e^x + 1) = 0$  car:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Par suite : la droite d'équation (D):  $y = x+1$  est

une asymptote oblique à la courbe Cf au voisinage de  $-\infty$

2)c)  $f(x) - (x+1) = -\ln(e^x + 1)$

On a :  $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  donc :  $e^x + 1 > 1$

Donc:  $\ln(e^x + 1) > \ln 1$  Donc:  $\ln(e^x + 1) > 0$

Donc:  $-\ln(e^x + 1) < 0$

Donc : la courbe Cf est au-dessous de la droite d'équation (D):  $y = x+1$

3)a) montrons que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+e^x}$  ?

$$f'(x) = \left(x+1 - \ln(1+e^x)\right)' = 1 - \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$f'(x) = \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

3)b) Tableau de variation :

|         |           |              |
|---------|-----------|--------------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$    |
| $f'(x)$ |           | +            |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\nearrow 1$ |

3)c) Etude de la concavité de Cf :

$$f''(x) = \left(\frac{1}{1+e^x}\right)' = -\frac{(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

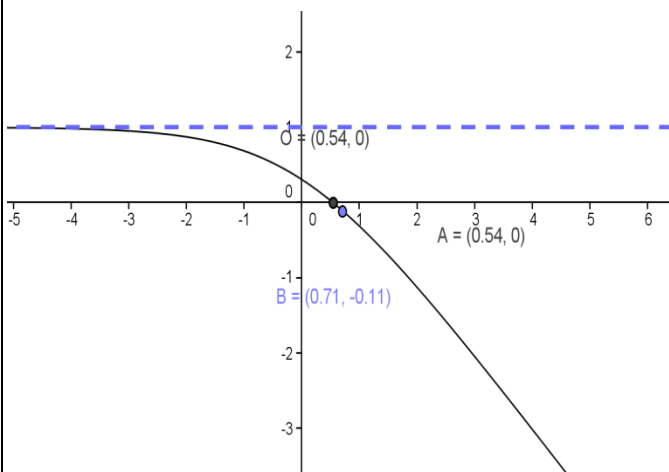
la courbe Cf est convexe dans  $\mathbb{R}$ ,

3)d)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(1+e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+e^{-x}) = 1$

$$\Leftrightarrow \ln(1+e^{-x}) = \ln e \Leftrightarrow e^{-x} = e - 1 \Leftrightarrow -x = \ln(e-1)$$

$\Leftrightarrow x = -\ln(e-1)$  Donc le point d'intersection de la courbe Cf avec l'axe des abscisses est :

$$A(-\ln(e-1); 0)$$



5) a) on a  $f$  est une fonction continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur l'intervalle

$$J = f(I) = f(\mathbb{R}) = ]-\infty; 1[$$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - \ln(1+e^{-y}) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow 1 - x = \ln(1+e^{-y}) \Leftrightarrow 1+e^{-y} = e^{1-x}$$

$$e^{-y} = e^{1-x} - 1 \Leftrightarrow -y = \ln(e^{1-x} - 1) \Leftrightarrow y = -\ln(e^{1-x} - 1)$$

Donc:  $\forall x \in ]-\infty; 1[ \quad f^{-1}(x) = -\ln(e^{1-x} - 1)$

### Exercice13 :

Partie 1 : Considérons la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$

par :  $f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}}$  si  $x > 0$  et  $f(0) = 0$

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite de 0.
- 2) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- 3) Déterminer la limite en  $+\infty$
- 4) Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $f$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .

5) a) Montrer que  $(\forall t > 0) \quad 0 < e^{-t} + t - 1 < \frac{t^2}{2}$

b) En déduire que :  $(\forall x > 0)$

$$\frac{-4}{x} < f(x) - x < \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$$

- c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$
- 6) Construire la courbe  $C_f$ .

Partie 2 :

Considérons la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f_n(x) = (x+2n)e^{\frac{-2}{x}} \text{ si } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0$$

où  $n \in \mathbb{N}^*$

- 1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction  $f_n$  à droite de 0.

b) Déterminer la limite en  $+\infty$

- c) Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $f_n$  puis dresser le tableau de variation de  $f_n$ .

2) Montrer que l'équation  $f_n(x) = \frac{2}{n}$

admet une solution unique  $\alpha_n$  dans  $]0, +\infty[$

3) a) Montrer que  $(\forall x > 0)$

$$f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$$

b) En déduire la monotonie de  $(\alpha_n)_n$

c) Montrer que la suite  $(\alpha_n)_n$  est convergente et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)_n = 0$

**Exercice14 :** Résoudre les équations et inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

1)  $5^x = 15$     2)  $3^{2x} \geq 5^{1-x}$     3)  $7^{x+1} - 7^{-x} < 6$

**Solution :** 1)  $5^x = 15$

$$5^x = 15 \Leftrightarrow e^{x \ln 5} = 15 \Leftrightarrow x \ln 5 = \ln 15 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 15}{\ln 5}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \frac{\ln 15}{\ln 5} \right\} ..$$

$$2) 3^{2x} \geq 5^{1-x} \Leftrightarrow \ln(3^{2x}) \geq \ln(5^{1-x})$$

$$\Leftrightarrow 2x \ln 3 \geq (1-x) \ln 5 \Leftrightarrow x(2 \ln 3 + \ln 5) \geq \ln 5$$

$$\text{Donc : } S = \left[ \frac{\ln 5}{2 \ln 3 + \ln 5}; +\infty \right[$$

$$3) 7^{x+1} - 7^{-x} < 6 \Leftrightarrow 7^{x+1} - \frac{1}{7^x} < 6 \quad \text{on a } 7^x > 0$$

$$7^{2x+1} - 1 < 6 \times 7^x \Leftrightarrow 7 \times (7^x)^2 - 6 \times 7^x - 1 < 0$$

$$\text{on pose : } t = 7^x \Leftrightarrow 7t^2 - 6t - 1 < 0$$

$$\text{on a : } 7t^2 - 6t - 1 = (t-1)(7t+1)$$

$$7^{x+1} - 7^{-x} < 6 \Leftrightarrow (7^x - 1)(7 \times 7^x + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow (7^x - 1)(7^{x+1} + 1) < 0 \Leftrightarrow 7^x - 1 < 0 \text{ car } 7^{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow 7^x < 1 \Leftrightarrow 7^x < 7^0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ car } x \rightarrow 7^x \text{ est}$$

strictement croissante ( $7 > 1$ ) donc :  $S = ]-\infty; 0[$

**Exercice15 :** Résoudre les équations et inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

1)  $2^{x+1} = 8^x$     2)  $3^x = 12$     3)  $5 \times 2^x + 2^{x+1} - 336 = 0$

4)  $100^x + 40 = 14 \times 10^x$

5)  $2^{x-1} > 4^x$     5)  $(0,5)^{2x} \geq (0,5)^{x+1}$

**Solution :1)**  $2^{x+1} = 8^x \Leftrightarrow 2^{x+1} = (2^3)^x \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^{3x}$

$$x+1=3x \Leftrightarrow 1=2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}=x \text{ donc : } S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$2) 3^x = 12 \Leftrightarrow x = \log_3 12 \text{ donc : } S = \{\log_3 12\}$$

$$3) 2^x - 3 \times 2^{x+1} - 16 = 0 \Leftrightarrow 2^x - 6 \times 2^x - 16 = 0$$

On pose :  $2^x = X$  donc :  $X^2 - 6X - 16 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 + 4 \times 1 \times 16 = 100 > 0$$

Donc :  $X_1 = 8$  et  $X_2 = -2$

Donc :  $2^x = 8$  et  $2^x = -2$  or  $2^x > 0$  donc

l'équation  $2^x = -2$  n'a pas de solutions

$$2^x = 8 \Leftrightarrow x = \log_2 8 \Leftrightarrow x = \log_2 2^3 \Leftrightarrow x = 3 \text{ donc : } S = \{3\}$$

$$4) 100^x + 40 = 14 \times 10^x \Leftrightarrow 10^{2x} - 14 \times 10^x + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow (10^x)^2 - 14 \times 10^x + 40 = 0 \text{ on pose : } 10^x = X$$

On a alors :  $X^2 - 14X + 40 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 40 = 36 > 0$$

$$X_1 = \frac{14+6}{2 \times 1} \text{ et } X_2 = \frac{14-6}{2 \times 1} \text{ donc : } X_1 = 10 \text{ et } X_2 = 4$$

Donc :  $10^{x_1} = 10$  et  $10^{x_2} = 4$  donc :  $x_1 = 1$  et

$$x_2 = \log_{10} 4 \text{ Donc : } S = \{1, \log_{10} 4\}$$

$$5) 2^{x-1} > 4^x \Leftrightarrow 2^{x-1} > (2^2)^x \Leftrightarrow 2^{x-1} > 2^{2x} \Leftrightarrow x-1 > 2x$$

$$\Leftrightarrow -1 > x \text{ donc : } S = ]-\infty, -1[$$

$$6) (0,5)^{2x} > (0,5)^{x+1} \Leftrightarrow 2x < x+1 \text{ car } x \rightarrow (0,5)^x \text{ est}$$

strictement décroissante car :  $0 < 0,5 < 1$

$$(0,5)^{2x} > (0,5)^{x+1} \Leftrightarrow x < 1 \text{ donc : } S = ]-\infty, 1[$$

**Exercice16:** Déterminer les primitives de la

fonction suivante :  $f(x) = 3^{x-2}$

**Solutions :** 1)  $f(x) = 3^{x-2}$  Si on pose :  $u(x) = x-2$

On a :  $f(x) = u'(x)3^{u(x)}$  donc les primitives de  $f$

$$\text{sont : } F(x) = \frac{1}{\ln 3} 3^{u(x)} + \lambda = \frac{1}{\ln 3} 3^{x-2} + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

**Exercice17:** Soit La fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = 4^x - 2^{x+1} \quad 1) \text{déterminer } D_f$$

2) calculer les limites aux bornes de  $D_f$

3) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

4) Etudier les branches infinies de la courbe  $C_f$

5) construire la courbe  $C_f$  dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

**Solutions :** 1)  $f(x) = e^{x \ln 4} - e^{(x+1) \ln 2}$

Donc :  $D_f = \mathbb{R}$

2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x \ln 2} - e^{(x+1) \ln 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln 2} (e^{x \ln 2} - 2) = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x \ln 2} - e^{(x+1) \ln 2} = 0 \text{ Car : } \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

3)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car la somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 2 \ln 2 \times e^{x \ln 2} \times (e^{x \ln 2} - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Tableau de variation de  $f$  :

| $x$     | $-\infty$ | 0  | $+\infty$ |
|---------|-----------|----|-----------|
| $f'(x)$ | -         | 0  | +         |
| $f(x)$  | 0         | -1 | $+\infty$ |

4) Etude des branches infinies de la courbe  $C_f$  :

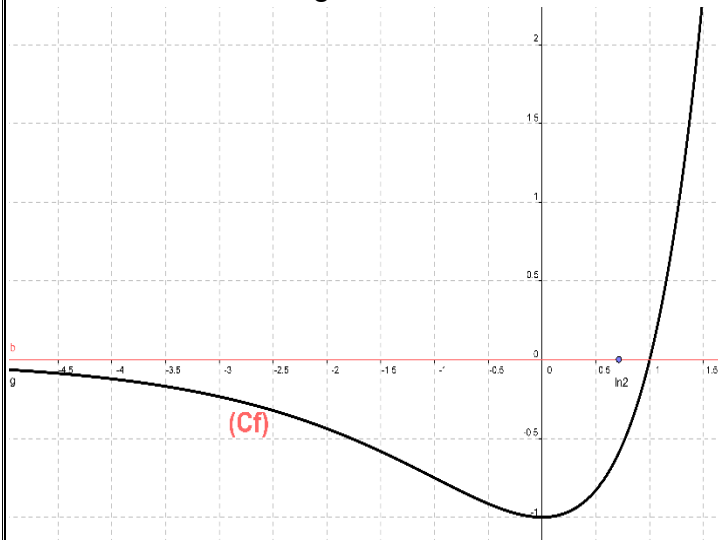
$$a) \text{on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ donc : } y = 0$$

est une asymptote  $a(C)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln 2}}{x} (e^{x \ln 2} - 2) = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$$

Donc : la courbe  $Cf$  admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de  $+\infty$



**Exercice 18:** Soit La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow x^x, \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

- 1) Etudier la continuité de la fonction  $f$  à droite de 0.
- 2) Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite de 0.
- 3) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- 4) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe  $Cf$  au voisinage de  $+\infty$ .
- 5) Tracer la courbe  $Cf$ .
- 6) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $f(x) = x$
- 7) Soit la suite  $(u_n)_n$  définie par :  $u_0 = \frac{1}{e}$  et  $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$ .

a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq 1)$

b) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)_n$  ; puis en déduire qu'elle converge.

c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_n$

**Exercice 19 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ; considérons la fonction  $f_n$  définie sur  $[1, +\infty[$  par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{(\ln x)^n}{x^2} \text{ si } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0$$

et  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Donner le tableau de variation de  $f_1$ .
2. Déterminer l'équation de la tangente  $(T_1)$  à la courbe  $(C_1)$  en point d'abscisse 1.
3. Construire la courbe  $(C_1)$  et la tangente  $(T_1)$  dans le repère  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
4. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f_n$ .
5. a) Etudier sur l'intervalle  $[1, +\infty[$  le signe de :  $f_2(x) - f_1(x)$
- b) En déduire les positions relatives des deux courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  ; puis construire  $(C_2)$
6. Considérons la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  où  $u_n$  est la valeur maximale de la fonction  $f_n$ .

a) Vérifier que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{n}{2e} \right)^n$

b) Pour  $x \in ]1, +\infty[$  ; calculer  $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

c) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (u_{n+1} = \frac{1}{2} f_n(e^{\frac{n+1}{2}}))$

d) En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (u_n \leq \frac{1}{e} \frac{1}{2^n})$

Et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**Exercice 20 : Partie 1**

1. En utilisant le T.A.F sur la fonction :  $t \rightarrow e^{-t}$  ;

montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^{**})(\exists \theta \in \mathbb{R}^{**}) (e^\theta = \frac{x}{1 - e^{-x}})$

2. En déduire que :  $(\forall x > 0)(1 - x < e^{-x})$  et que

$(\forall x > 0)(1 + x < e^x)$

3. En déduire que :  $(\forall x > 0)(0 < \ln \left( \frac{xe^x}{e^x - 1} \right) < x)$

**Partie 2**

Considérons la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$

Par :  $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$  Si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 1$

1) Etudier la continuité de la fonction  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .

2) Déterminer la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et étudier la branche infinie de la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

3) a) Montrer que  $(\forall x > 0)$

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < e^{-x} + x - 1 < \frac{x^2}{2}\right)$$

b) Montrer que  $(\forall x > 0) \left(\frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} \cdot f(x)\right)$

c) En déduire que  $f$  est dérivable à droite de 0 et donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

4) a) Montrer que :  $(\forall x > 0) \left(f'(x) = \frac{e^x(e^x - x - 1)}{(e^x - 1)^2}\right)$

b) En déduire que  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c) Construire la courbe  $C_f$ .

d) Montrer que  $f$  est une bijection de  $[0, +\infty[$  Vers  $J = f([0, +\infty[)$ .

Partie 3 : Considérons la suite  $(u_n)_n$  définie par :

$$u_0 \in ]0, +\infty[ \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) (u_{n+1} = \ln(f(u_n))).$$

1) Montrer que la suite  $(u_n)_n$  est strictement positive,

2) Montrer que la suite  $(u_n)_n$  strictement décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que l'équation  $\ln(f(x)) = x$  admet 0 comme seule solution.

b) En déduire la limite de la suite  $(u_n)_n$

*« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.*

*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et  
exercices Que l'on devient un mathématicien*

