

# CONTINUITE - CORRECTION

## Exercice n°1

1) Sur  $]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$ , (c'est-à-dire en dehors du point 2),  $f$  est continue puisqu'elle est définie à l'aide d'une fonction polynôme et d'une fonction affine

Pour examiner la continuité en 2, on détermine  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1 = 3$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 5 - x = 3$ . Comme

$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = f(2)$ , on conclut que la fonction  $f$  est continue en 2

2) Sur  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$ , (c'est-à-dire en dehors des points -1 et 1),  $f$  est continue puisqu'elle est définie à l'aide de fonctions affines.

Pour examiner la continuité en -1, on détermine  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} -2x - 3 = -1$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x = -1$ . Comme

$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$ , on conclut que la fonction  $f$  est continue en -1

Pour examiner la continuité en 1, on détermine  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -3x = -3$ . Comme

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$ , on conclut que la fonction  $f$  n'est pas continue en 1

## Exercice n°2

1)  $f$  est continue sur  $]-\infty; 0[$  en tant que fonction polynôme et sur  $]0; +\infty[$  en tant que fonction affine. Reste à examiner la continuité en zéro. On examine  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 1 = -1$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x - 1 = -1$ . Ces deux limites étant égales

et égales à  $f(0) = 0 - 1 = -1$ , la fonction est continue en 0, donc sur  $\mathbb{R}$

$f$  est dérivable sur  $]-\infty; 0[$  en tant que fonction polynôme et sur  $]0; +\infty[$  en tant que fonction affine. Reste à examiner la dérivabilité en zéro.

Pour tout  $x \in ]-\infty; 0[$ ,  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - 1 - (-1)}{x} = x$  donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$  donc  $f$  est dérivable à gauche en 0 et

$f'_g(0) = 0$ . De plus, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - 1 - (-1)}{x} = 1$  donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$  donc  $f$  est dérivable

à droite en 0 et  $f'_d(0) = 1$ . Mais comme  $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ , on conclut que f n'est pas dérivable en 0

2)  $f$  est continue sur  $]-\infty; 2[$  et sur  $]2; +\infty[$  en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.

Il reste à examiner la continuité en 2. Pour tout  $x \neq 2$ ,  $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = x + 1$ , donc

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 1 = 3 = f(2)$ . La fonction est continue en 2, donc sur  $\mathbb{R}$

3)  $f$  sera continue en 0 si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = a$ . Il faut donc déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ . En posant

$g(x) = \sqrt{1+x}$ , on reconnaît un taux d'accroissement :  $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ , dont la limite en 0 est donc égale à

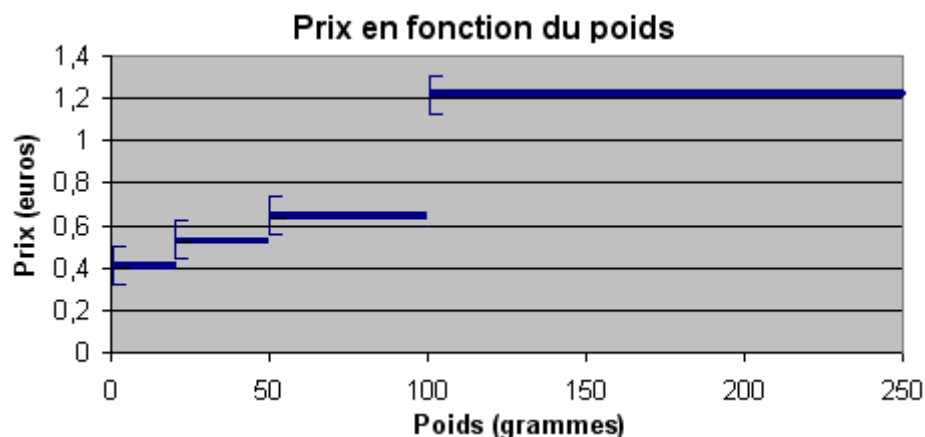
$g'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$ . f sera continue en 0 si et seulement si  $a = \frac{1}{2}$

### Exercice n°3

La fonction  $f$  qui, au poids  $x$  exprimé en grammes, associe le tarif d'affranchissement exprimé en euros, est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0,41 & \text{si } x \in [0; 20] \\ 0,53 & \text{si } x \in ]20; 50] \\ 0,64 & \text{si } x \in ]50; 100] \\ 1,22 & \text{si } x \in ]100; 250] \end{cases}$$

Il s'agit d'une fonction en escalier dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



La fonction présente des points de discontinuité en 20, 50 et 100

En effet, puisque  $\lim_{x \rightarrow 20^-} f(x) = 0,41$  et  $\lim_{x \rightarrow 20^+} f(x) = 0,53$ , on aura  $\lim_{x \rightarrow 20} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 20} f(x)$

### Exercice n°4

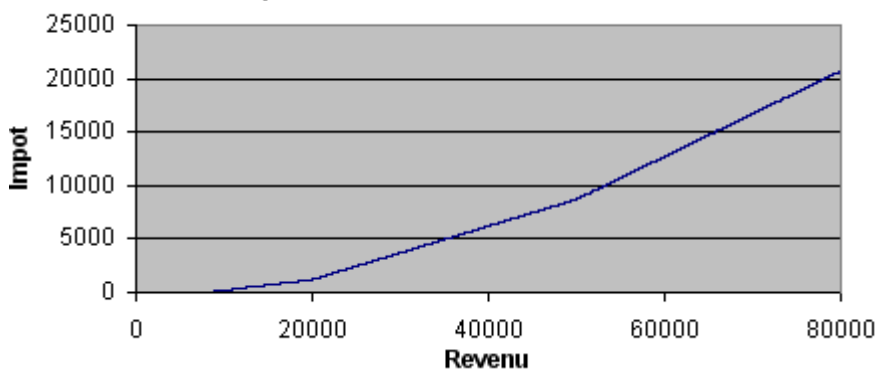
1) La fonction  $f$  qui, à tout revenu  $x$  associe l'impôt  $f(x)$  exprimé en euros correspondant, est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; 8000[ \\ 0,1(x - 8000) = 0,1x - 800 & \text{si } x \in [8000; 20000[ \\ 0,25(x - 20000) + 0,1 \times 12000 = 0,25x - 3800 & \text{si } x \in [20000; 50000[ \\ 0,4(x - 50000) + 0,1 \times 12000 + 0,25 \times 30000 = 0,4x - 11300 & \text{si } x \in [50000; +\infty[ \end{cases}$$

première tranche complète  
première tranche complète   première tranche complète

2) Il s'agit d'une fonction affine par morceaux dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :

**impôts en fonction du revenu**



3) Si le contribuable déclare 30000 euros, son impôt sera égal à  $f(30000) = 0,25 \times 30000 - 3800 = 3700 \text{ €}$

4) Si le contribuable paye 5000 € d'impôts, son revenu se trouve dans la tranche  $[20000; 50000[$ . En résolvant l'équation  $0,25x - 3800 = 5000 \Leftrightarrow x = \frac{5000 + 3800}{0,25} = 35200$ , on déduit que le revenu du contribuable est environ égal à 35200 € annuel.

### Exercice n°5

L'équation  $f(x) = 3$  admet 2 solutions, l'une dans l'intervalle  $[-3 ; 0]$ , l'autre dans l'intervalle  $[0 ; 3]$

L'équation  $f(x) = 0$  admet 2 solutions, l'une dans l'intervalle  $[0 ; 3]$ , l'autre dans l'intervalle  $[3 ; 4]$

L'équation  $f(x) = -2$  admet 2 solutions, l'une dans l'intervalle  $[0 ; 3]$ , l'autre dans l'intervalle  $[3 ; 4]$

### Exercice n°6

1) On peut appliquer le théorème de la valeur intermédiaire par exemple sur l'intervalle  $[0 ; 4]$  car la fonction  $y$  est continue et strictement croissante. De même on peut appliquer ce théorème sur l'intervalle  $[4 ; 10]$

2) On ne peut pas appliquer le théorème de la valeur intermédiaire sur l'intervalle  $[0 ; 10]$  car la fonction  $n'y$  est pas strictement monotone.

3) Sur l'intervalle  $[10 ; 14]$ ,  $f$  est continue et strictement croissante. De plus  $f(10) = 0$  et  $f(14) = 7$ . Comme  $6 \in [f(10); f(14)]$ , il existe un unique nombre  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 6$ . Puisque  $f(13) < 6$  et  $f(14) > 6$ , on en conclut que  $13 < \alpha < 14$

4) Il n'existe pas de nombre unique  $\beta$  tel que  $f(\beta) = 0$  sur l'intervalle  $[0, 14]$ , car  $f$  n'y est pas monotone. En revanche, c'est le cas sur l'intervalle  $[0 ; 4]$  (on lit exactement  $\beta = 1$ )

### Exercice n°7

$f$  présente une discontinuité en 0

1) On ne peut pas trouver  $\alpha \in I$  tel que  $f(\alpha) = \frac{3}{2}$  car  $\frac{3}{2}$  n'est pas une valeur prise par  $f$

2) Sur l'intervalle  $[-2 ; 0[$ ,  $f$  est continue et strictement croissante. Puisque  $0,1 \in \left[ f(-2); \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) \right]$ , il existe un unique nombre  $\beta \in I$  tel que  $f(\beta) = 0,1$

3) Sur l'intervalle  $[0 ; 2]$ ,  $f$  est continue et strictement croissante. Puisque  $2,5 \in [f(0); f(2)]$ , il existe un unique nombre  $\gamma \in [0 ; 2]$ , tel que  $f(\gamma) = 2,5$

### Exercice n°8

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x^3 - 1200x - 100$

1)  $g$  est définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x$  réel  $g'(x) = 3x^2 - 1200 = 3(x^2 - 400) = 3(x - 20)(x + 20)$ .

On en déduit successivement le signe de  $g'(x)$  et le sens de variation de  $g$  :

$x$	$-\infty$	$-20$	$20$	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow 15900$	$\searrow -16100$	$\nearrow +\infty$	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty,$$

$$g(-20) = 15900, \quad g(20) = -16100$$

2) Sur l'intervalle  $[20 ; 40]$ ,  $g$  est continue et strictement croissante. De plus  $g(20) = -16100 < 0$  et  $g(40) = 15900 > 0$ . Puisque  $0 \in [g(20); g(40)]$ , Le théorème de la valeur intermédiaire affirme l'existence d'une unique valeur  $\alpha \in [20 ; 40]$  telle que  $g(\alpha) = 0$ . Grâce à la calculatrice, on dresse des tableaux de valeurs de plus en plus précis :

X	Y1
31	-7508
32	-5732
33	-3763
34	-1596
35	775
36	3356
37	6153

PUIS

X	Y1
34.2	-1138
34.3	-906.4
34.4	-672.4
34.5	-436.4
34.6	-198.3
34.7	41.923
34.8	284.19

nous permettant d'affirmer que  $34,6 < \alpha < 34,7$

Exercice n°9

**Première partie**

1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ ,

2)  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 60x = 3x(x - 20)$ . On en déduit que  $f$  s'annule en 0 et en 20, est strictement positive sur  $]-\infty; 0[ \cup ]20; +\infty[$  et strictement négative sur  $]0; 20[$ .

3) Ainsi  $f$  est strictement croissante sur  $]-\infty; 0]$ , strictement décroissante sur  $]0; 20]$  et strictement croissante sur  $[20; +\infty[$ . Puisque  $f(0) = 112$  et  $f(20) = 20^3 - 30 \times 20^2 + 112 = -3888$ , son tableau de variations est donc :

$x$	$-\infty$	<b>0</b>	<b>20</b>	$+\infty$	
$f'(x)$	+	<b>0</b>	-	<b>0</b>	+
$f(x)$	$-\infty$	↗ 112	↘ -3888	↗ $+\infty$	

4) Sur l'intervalle  $]-\infty; 0]$ ,  $f$  est continue et strictement croissante. Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0 < f(0)$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet donc une unique solution  $x_1 \in ]-\infty; 0]$ .

On procède de même sur les intervalles  $]0; 20]$  et  $[20; +\infty[$  :

Sur l'intervalle  $]0; 20]$ ,  $f$  est continue et strictement décroissante. Comme  $f(20) < 0 < f(0)$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet donc une unique solution  $x_2 \in ]0; 20]$ .

Sur l'intervalle  $[20; +\infty[$ ,  $f$  est continue et strictement croissante. Comme  $f(20) < 0 < \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet donc une unique solution  $x_3 \in [20; +\infty[$ .

5) Grâce à la calculatrice, on dresse des tableaux de valeurs de plus en plus précis ceci permet d'établir que  $-1,9 < x_1 < -1,8$ , puis  $x_2 = 2$  et enfin  $29,8 < x_3 < 29,9$

6) Le signe de  $f$  est donné par :

$f$  étant strictement croissante sur  $]-\infty; 0]$ , elle l'est sur  $]-\infty; x_1]$ , et pour tout  $x \in ]-\infty; x_1]$ ,  $f(x) \leq f(x_1)$ , c'est-à-dire  $f(x) \leq 0$ . De plus pour tout  $x \in [x_1; 0]$ ,  $f(x_1) \leq f(x)$ , c'est-à-dire  $0 \leq f(x)$

$f$  étant strictement décroissante sur  $]0; 20]$ , elle l'est sur  $]0; x_2 = 2]$ , et pour tout  $x \in [0; x_2]$ ,  $f(x) \geq f(x_2)$ , c'est-à-dire  $f(x) \geq 0$ . De plus pour tout  $x \in [x_2; 20]$ ,  $f(x) \leq f(x_2)$ , c'est-à-dire  $f(x) \leq 0$

$f$  étant strictement croissante sur  $[20; +\infty[$ , elle l'est sur  $[20; x_3]$ , et pour tout  $x \in [20; x_3]$ ,  $f(x) \leq f(x_3)$ , c'est-à-dire  $f(x) \leq 0$ . De plus pour tout  $x \in [x_3; +\infty[$ ,  $f(x_3) \leq f(x)$ , c'est-à-dire  $0 \leq f(x)$

En résumé :

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2 = 2$	$x_3$	$+\infty$		
$f(x)$	-	<b>0</b>	+	<b>0</b>	-	<b>0</b>	+

**Deuxième partie**

7) On calcule  $f(2) = 2^3 - 30 \times 2^2 + 112 = 0$

8) Pour tout réel  $x$ ,  $(x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$

On aura alors  $(x - 2)(ax^2 + bx + c) = f(x)$  si et seulement si pour tout réel  $x$ ,

$$ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c = x^3 - 30x^2 + 112, \text{ c'est-à-dire si et seulement si } \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -30 \\ c - 2b = 0 \\ -2c = 112 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -28 \\ c = -56 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = (x-2)(x^2 - 28x - 56)$

9) On résout  $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 28x - 56) = 0$  si et seulement si  $x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$  ou  $x^2 - 28x - 56 = 0$ . Pour cette dernière équation du second degré, on calcule le discriminant  $\Delta = (-28)^2 - 4 \times 1 \times (-56) = 1008$ . Comme  $\Delta = (12\sqrt{7})^2$ , l'équation admet deux solutions réelles distinctes  $x_1 = \frac{28 + 12\sqrt{7}}{2} = 14 + 6\sqrt{7} \approx 29,87$  à  $10^{-2}$  près et  $x_2 = \frac{28 - 12\sqrt{7}}{2} = 14 - 6\sqrt{7} \approx -1,87$  à  $10^{-2}$  près

#### Exercice n°10

L'équation  $x^3 + 3x = 5$  étant équivalente à  $x^3 + 3x - 5 = 0$ , on note  $f(x) = x^3 + 3x - 5$ , qui est définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On dérive : pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$ . Puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 + 1 > 0$ , on en déduit  $f'(x) > 0$ .  $f$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $0 \in \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$ , donc le théorème des valeurs intermédiaires affirme que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

En utilisant la calculatrice, on peut dresser un tableau de valeurs de  $f(x)$  qui nous permet d'affirmer que  $1,15 < \alpha < 1,16$ . Une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près est donc 1,15