

TD : LA DERIVATION

Exercice1 :

1- Montrer en utilisant la définition que la fonction $f(x) = x^2 + x - 3$ est dérivable en $a = -2$.

2) soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \dots x \geq 1 \\ f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} \dots x < 1 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

3) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + x; x < 0 \\ f(x) = -2x^2 + 3x; x \geq 0 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$

Exercice 2: soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} \dots 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^3 - x} \dots x > 1 \end{cases}$$

1) déterminer le domaine de définition de f

2) étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$ et donner une interprétation géométrique du résultat

3) étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique

Exercice3 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

1) étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

2) étudier la dérivabilité de f à gauche en

$x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

3) étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

4) donner l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0 = 1$

4) donner l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0 = 1$

Exercice4 : Calculer le nombre dérivé de

$f(x) = x^3 + x$ en $a = 1$ en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

Exercice5 : donner une approximation de $\sin 3$

Exercice6 : Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^2 + 3x - 1$ 2) $f(x) = 4 \sin x$

3) $f(x) = x^4 \cos x$ 4) $f(x) = \sqrt{x} + x^3$

5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 6) $f(x) = \frac{6}{4x^2 + 3x - 1}$

7) $f(x) = \frac{4x-3}{2x-1}$ 8) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

9) $f(x) = (2x+3)^5$

Exercice7 : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sin(2x^2 - 1)$

2) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2 + 2}\right)$

3) $f(x) = \tan \cos(x)$

Exercice8 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \cos x$$

1) montrer que f est une bijection de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$

2) calculer : $(f^{-1})'(0)$

Exercice9 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = x^3 + x^2$$

1- Dresser le tableau de variation de f

2- Montrer que f est une bijection de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R}^+ et calculer $f(1)$.

3- Déterminer $(f^{-1})'(2)$

Exercice10 : Soit la fonction $g(x) = \cos(2x)$

1- Dresser le tableau de variation de g dans $[0, \pi]$

2- Montrer que g est une bijection de $]0, \pi/2[$ Vers $]-1, 1[$.

3- Vérifier que $(\forall y \in]0, \pi/2[)$ $(g'(y) \neq 0)$ et déterminer $(g^{-1})'(x)$ pour x dans $] - 1, 1[$.

Exercice 11 : Déterminer les domaines de dérivabilité et les fonctions dérivées des fonctions suivantes : 1) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + x - 4}$

2) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{2x-1}{x^2-x}}$

Exercice 12 : résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes : $(E_1): \sqrt[3]{3+x} - \sqrt[3]{3-x} = \sqrt[6]{9-x^2}$

$(E_2): 2x\sqrt{x} - 3x\sqrt[4]{\frac{1}{x}} = 20$

Exercice 13 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x-1}}$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x} - \sqrt[6]{x+1}}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+1}$ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - x$

Exercice 14 : soit f une fonction définie sur

$$I =]-\pi; \pi[\text{ par : } \begin{cases} f(x) = 2 \frac{\cos x - 1}{\sin x}; \text{ si } 0 < x < \pi \\ f(x) = \frac{x|x+1|}{x-1}; \text{ si } -\pi < x \leq 0 \end{cases}$$

1) montrer que f est dérivable en $x_0 = 0$ et donner l'équation de la tangente à la courbe de f en $x_0 = 0$

2) a) étudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$
 b) donner les équations des demi-tangentes à la courbe de f en $x_0 = -1$

Exercice 15 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{3x-2} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^3$$

1) déterminer le domaine de définition D_f de f
 2) déterminer le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée

Exercice 16 : en utilisant la dérivée calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^{2018} - 1}{x+1}$ 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
 Dit un proverbe.
 C'est en s'entraînant régulièrement aux
 calculs et exercices que l'on devient un
 mathématicien

