CONTINUITE - EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\le 2 \\ 5-x & si \quad x>2 \end{cases}$

f est-elle continue sur son ensemble de définition ?

Mêmes questions avec : $f(x)=\begin{cases} -2x-3 \ pour \ x\le -1 \\ x \ pour \ -1<x\le 1 \\ -3x \ pour \ x>1 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice n°2.

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x<0 \\ x-1 & \text{si} \quad x\ge 0 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{si} \quad x\ne 2 \\ 3 & \text{si} \quad x=2 \end{cases}$. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$

3) Quelle valeur de a faut-il choisir pour que la fonction définie par :

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{si} \quad x\in[-1;0[\cup]0;+\infty[\\ a \quad \text{si} \quad x=0 \end{cases}$ soit continue en 0 ?

Exercice n°3.

Le tarif ci-contre définit la fonction "tarifs postaux économiques" qui, au poids x exprimé en grammes, associe le tarif d'affranchissement exprimé en euros. Représentez graphiquement cette fonction et indiquez ses points de discontinuité

Poids en grammes
Jusqu'à :
20
50
100
250

Exercice n°4.

On considère un système d'imposition continu à 4 tranches telles que le contribuable paye :

- 0 % d'imposition sur les 8000 premiers euros de salaire
- 10 % d'imposition sur la tranche 8000 - 20000 euros de salaire
- 25 % d'imposition sur la tranche 20000 - 50000 euros de salaire
- 40 % d'imposition au delà de 50000 euros

1) Donner l'expression de la fonction f qui à tout revenu x associe l'impôt $f(x)$ correspondant

2) Dans un repère dont les unités seront judicieusement choisies, donner une représentation graphique de la fonction f.

3) Un contribuable déclare 30000 euros. Donner son impôt arrondi à l'euro près

4) Estimer le revenu annuel (arrondi à l'euro près) d'un contribuable dont l'impôt annuel est de 5000 euros.

Exercice n°5.

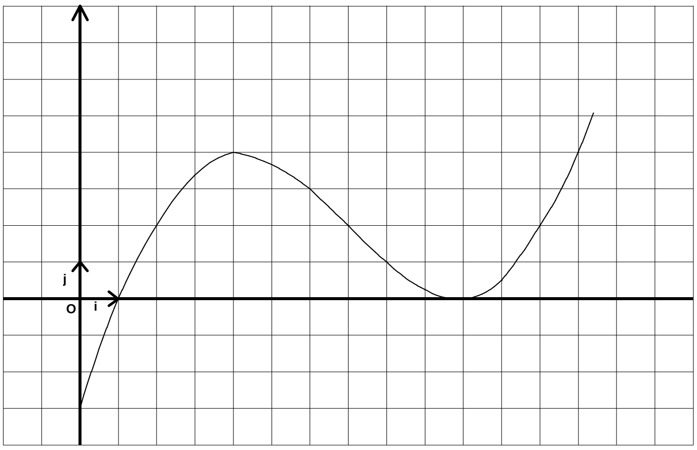
Soit f une fonction définie et continue sur [-3;4] dont le tableau de variations est :

x	-3		0		1		3		4
$f(x)$	1	↗	5	↘	1	↘	-3	↗	1

1) Dénombrer, sans justifier, les solutions des équations suivantes :

a) $f(x)=3$ **b)** $f(x)=0$ **c)** $f(x)=-2$

Exercice n°6.
Soit f la fonction numérique définie sur [0;14] dont la représentation graphique est :



1) Citez deux intervalles sur lesquels on peut appliquer le théorème de la valeur intermédiaire en expliquant pourquoi
2) Citez un intervalle sur lesquels on ne peut pas appliquer le théorème de la valeur intermédiaire en expliquant pourquoi
3) Peut-on trouver un unique nombre α tel que $f(\alpha)=6$? Si oui, explicitez pourquoi et donner un encadrement de α à l'aide de deux entiers consécutifs.
4) Même questions avec un unique nombre β tel que $f(\beta)=0$?

Exercice n°7. Le tableau ci-dessous résume les variations de f définie sur I=[-2;2] :

x	-2		0		2
$f(x)$	0	↗	1 / 2	↗	3

On précise que $f(0)=1$

1) Peut-on trouver $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}$?

2) Peut-on trouver $\beta \in I$ tel que $f(\beta)=0{,}1$?

3) Montrez qu'il existe γ unique, $\gamma \in [0;2]$, tel que $f(\gamma)=2{,}5$

Exercice n°8.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^3-1200x-100$
1) Etudier le sens de variation de g (+limites) et dresser son tableau de variation.
2) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle [20 ; 40]. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

Exercice n°9. **Deux méthodes de résolution**
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-30x^2+112$
Il s'agit d'étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
Première partie
1) Etudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet trois solutions.
5) Avec la calculatrice, donner l'arrondi au dixième ou la valeur exacte de chaque solution.
6) En déduire le signe de f.
Deuxième partie
7) Calculer $f(2)$.
8) Trouver trois réels a, b et c tels que pour tout réel x : $f(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$
9) Résoudre l'équation $f(x)=0$.

Exercice n°10.

Démontrer que l'équation $x^3 + 3x = 5$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$.

Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.