

TD : L'ARITHMETIQUE : Exercices de rappels

Exercice1 : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156

12) Déterminer dans $\mathbb{Z}$ tous les diviseurs de -8

Exercice2 : 1) $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$

a) montrer que si $a \mid 2b+c$ et $a \mid b+c$ alors $a \mid c$

b) montrer que si $a \mid 2b+3c$ et $a \mid b+c$ alors $a \mid c$

c) montrer que si $a \mid x-y$ et $a \mid b-c$ alors $a \mid xb-cy$

2) $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ et $a \mid 12n+1$ et $a \mid -2n+3$

Montrer que $a \mid 19$

3) $d \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ et $d \mid n^2+3$ et $d \mid 2n-1$

Montrer que $d \mid 13$

Exercice3 : $a \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$

Montrer que : $\begin{cases} a \mid 5x-7 \\ a \mid 2x+3 \end{cases} \Rightarrow a \mid 29$

Exercice4 : Soient $a_n = 2n + 1$ et $b_n = 5n + 4$

1- Montrer que tout diviseur commun de a_n et b_n divise 3.

2- Déterminer tous les diviseurs communs de a_n et b_n

Exercice5 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$:

3 divise $4^n - 1$

Exercice6 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2 \mid 3n+1$

Exercice7 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

Exercice8 : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes : a) $x^2 - y^2 = 32$ avec $x \succ y$

b) $2xy + 2x + y = 99$

Exercice9 : déterminer le nombre entier naturel n Tel que le quotient de la division euclidienne de n par 25 est p et le reste est p^2 ($p \in \mathbb{N}$)

Exercice 10: n et a et b des entiers naturels
Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q par b Alors q' est aussi le quotient de n par ab

Exercice11: $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$

si q est le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^9 - 1$ par b^{10}

Exercice12: 1) Les nombres suivants sont-ils premiers : 499 ; 601 ; 703 ; 2003 ; $2n^2 + 3n$ $n \in \mathbb{N}$

Exercice 13 :

Montrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 3 ne peut pas être égale à 2.

Exercice 14 :

a) Montrer que tout nombre premier s'écrit de la forme $p = 6n + 1$ ou $p = 6n + 5$

Exercice15 : montrer que $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \wedge (a+1) = 1$

Exercice16 : $n \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A = n^2 + 3$ et $B = n + 2$

1) montrer que $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel n tel que : $\frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N}$

Exercice 17:

1- Montrer que tout diviseur commun de :

$a = 2n + 3$ et $b = 5n + 1$ est un diviseur de 13

2- Déterminer tous les diviseurs communs de a et b .

3- Déterminer les valeurs de n pour lesquels : $a \wedge b = 13$

Exercice 18: $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$ tels que : $a = bc + d$

1) montrer que $a \wedge b = b \wedge d$

2) En déduire que : $a \wedge b = b \wedge (a - bc)$

Exercice19 : $a \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A = 35a + 57$ et $B = 45a + 76$
montrer que $A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

Exercice 20:

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer : $67 \wedge 39$

2) en déduire deux nombres relatifs u et v tel que : $39u + 67v = 1$

