Exercices d'applications et de réflexions *sur* les Lois de composition interne

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

TD :Structures algébriques(partie1)

Lois de composition interne

Exercice1 : montrer on utulisant les tableaux de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}=\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4}\}$ que l'addition et la multiplication sont des lois de compositions internes

Exercice2 : on définit sur l'ensemble $]-1;1[$ la relation T tel que : $x\mathrm{T}y=\frac{x+y}{1+xy}$; $\forall(x;y)\in]-1;1[^2$

Monter que T est une loi de composition interne Dans $]-1;1[$

Exercice3 : on considére la matrice suivante :

$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ calculer A^2 et A^3 et en déduire A^n $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Exercice4 :on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y=xy-3x-3y+12$; $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et soit : $S=]3;+\infty[$

Monter que S est une partie stable pour $(\mathbb{R};*)$

Exercice5 :1) on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a*b=a+b-3ab$; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$

Monter que $*$ est commutative et associative

2) on muni $\mathbb{R}^2$ d'une loi de composition interne T définit par :

$(a;b)\mathrm{T}(x;y)=(ax;ay+b)$; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Monter que T est ni commutative et ni associative dans $\mathbb{R}^2$

Exercice6 : on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a*b=ab-(a+b)+2$;

$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ 1) Monter que $*$ est commutative

2) Monter que $*$ admet un élement neutre et determiner les élements symétrisables

Exercice7 : on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y=xy-4x-4y+20$;

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ 1) la loi $*$ est-elle commutative ?

2) la loi $*$ admet -elle un élement neutre et determiner le s'il existe

3) determiner les élements symétrisables s'il existent

Exercice8 : on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y=x+4y-1$; $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

1) la loi $*$ est-elle commutative ?

2) la loi $*$ admet -elle un élement neutre et determiner le s'il existe

Exercice9 : on considére les matrices suivantes :

$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\\-2&-2&0\end{pmatrix}$

1) Montrer que : $A^2-2A+I_2=0$ et en déduire que La matrice A est inversible et déterminer A^{-1}

2) calculer : B^2 et B^3 et en déduire que La matrice B n'admet pas d'inverse

Exercice10 : on considére les matrices suivantes : $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

1) calculer : A^2 et A^3 et en déduire que

2) Montrer que : $A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\0 & 1\end{pmatrix}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) Montrer que : $(A-I_2)^2=0_2$ avec $0_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

4) en déduire que La matrice A est inversible et déterminer A^{-1}

Exercice11 : on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$E=\left\{M_{(a;b)}=\begin{pmatrix}a & b\sqrt{2}\\b\sqrt{2} & a\end{pmatrix}/(a;b)\in\mathbb{Z}^2\text{et } a^2\text{-}2\text{b}^2=1\right\}$$

Monter que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

Exercice12 : soit l'application : $\begin{array}{l}f:(\mathbb{Z};+)\to(\mathbb{Z}^*;\times)\\x\mapsto 5^x\end{array}$

montrons que f est un morphisme de ($\mathbb{Z}$, +) dans ($\mathbb{Z}^*$, $\times$)

Exercice13 : soit l'application : $\begin{array}{l}g:]0;+\infty[\to\mathbb{R}\\x\mapsto\ln x\end{array}$

montrons que g est un morphisme de :

($]0;+\infty[$, $\times$)dans ($\mathbb{R}$, +)

Exercice14: soit l'application : $\begin{array}{l}h:\mathbb{C}\to\mathbb{R}\\z\mapsto|z|\end{array}$

montrons que h est un morphisme de : ($\mathbb{C}$, $\times$)dans ($\mathbb{R}$, $\times$)

Exercice15 : soit l'application :

$k:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^*$

$\theta\mapsto e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

montrons que k est un morphisme de : ($\mathbb{R}$, $+$) dans ($\mathbb{C}^*$, $\times$)

Exercice16 :soit l'application : $\begin{array}{l}l:\mathbb{R}\to M_2(\mathbb{R})\\x\mapsto\begin{pmatrix}1 & x\\0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$

montrons que l est un morphisme de : ($\mathbb{R}$, $+$) dans ($M_2(\mathbb{R})$, $\times$)

Exercice17:soit f l'application : $\begin{array}{l}f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\\n\mapsto\overline{2^n}\end{array}$

montrons que f est un morphisme de ($\mathbb{N}$, $+$) dans ($\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\times$)

Exercice18 :on muni $\mathbb{R}^2$ de la loi de composition interne suivante : $(a;b)+(a';b')=(a+a';b+b')$;

$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$

Soit $A(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'ensemble des applications affines :

$A(\mathbb{R};\mathbb{R})=\left\{f_{(a;b)}/\forall x\in\mathbb{R}:f_{(a;b)}(x)=ax+b\right\}$

Soit l'application : φ : $\begin{array}{l}\varphi:\mathbb{R}^2\to A(\mathbb{R};\mathbb{R})\\(a;b)\mapsto f_{(a;b)}\end{array}$

Montrer φ est un morphisme de ($\mathbb{R}^2$, $+$) dans ($A(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $+$)

Exercice19 :soient $a\in]2;+\infty[$ et $b\in]2;+\infty[$

On pose : $a*b=(a-2)(b-2)+2$

1)montrer que $*$ est une loi de composition interne Dans $I=]2;+\infty[$

2)soit l'application définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ vers I tel que : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^{*+}$

a) montrer que f est un morphisme de ($\mathbb{R}^{*+}$, $\times$) dans (I , $*$)

b) en déduire que $*$ est associative et admet un élément neutre a determiner

Exercice20 :on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a*b=ab+(a^2-1)(b^2-1)$; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ 1) Monter que $*$ est commutative

2) Monter que $*$ n'est pas associative
3) est ce que la loi $*$ admet un élement neutre ?
4)resoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
a) $2*x=5$ b) $x*x=1$

Exercice21 :on muni $\mathbb{R}^2$ de la loi de composition interne suivante : $(a;b)*(a';b')=(a\times a';b\times b')$;

$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$

1) Monter que $*$ est commutative et associative
2) Monter que $*$ admet un élement neutre et determiner dans $\mathbb{R}^2$ les élements symétrisables Pour la loi $*$

3)soit : $S=\mathbb{R}\times\{0\}$

a)montrer que S est une partie stable de($\mathbb{R}^2$,$*$)

b) Monter que (S ,$*$) admet un élement neutre et comparer les les élements neutres de ($\mathbb{R}^2$,$*$) et de (S ,$*$)

Exercice22 :on muni $\mathbb{C}$ de la loi de composition interne T suivante : $zTz'=z\overline{z'}$; $\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2$

$\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$ (F, T) $\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2$

1) étudier la commutativité et l'associativité de T

2)résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(zTz)Tz=i$

Exercice23 :on muni $I=]0;+\infty[$ de la loi de composition interne $*$ suivante :

$x*y=\sqrt{x^2+y^2}$ $\forall(x;y)\in I^2$

soit f l'application définie sur I vers I

tel que : $f(x)=x^2$ $\forall x\in I$

1) montrer que : $f(x*y)=f(x)+f(y)$

2)a) montrer que $*$ est associative

b) est ce que $*$ admet un élément neutre

3)soit $a\in I$ calculer : $A=\underbrace{a*a*....*a}_{nfois}$ $n\in\mathbb{N}^*$

Exercice24 :1) on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y=x+y-xy$; $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

tel que : $f(x)=1-x$ $\forall x\in\mathbb{R}$

1) montrer que f est un homomorphisme bijectif De $(\mathbb{R};*)$ dans $(\mathbb{R};\times)$

2)en déduire que $*$ est associative et que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera
3) determiner l'ensemble des élements symétrisables pour la loi $*$

4)soit $a\in\mathbb{R}$ calculer : $A=\underbrace{a*a*....*a}_{nfois}$ $n\in\mathbb{N}^*$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien