

Exercices d'applications et de réflexions sur les nombres complexes (Partie 1)

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences maths

TD : NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 : Trouver la forme algébrique et déterminer la parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2+i)(-1+i) + (1+2i)^2 \quad z_2 = (1+i\sqrt{3})^3$$

$$z_3 = \frac{1-3i}{3-i} \quad z_4 = \frac{1+i}{3-2i} \quad z_5 = (1+i)^{10}$$

Exercice 2 : soient dans le plan complexe les points : $A(1+i)$ et $B\left(\frac{1}{2}+2i\right)$ et $C(-1-i)$

Montrer que les les points A , B et C sont alignés.

Exercice 3 : soient dans le plan complexe les points : $A(2;-3)$ et $B(1;1)$ et $C(1;2)$

1) Déterminer les affixes des points A et B et C ?

2) Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

3) Déterminer l'affixe de I , milieu de $[AB]$.

4) Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

5) Déterminer le barycentre de $\{(A, 2); (B, -1), (C, 3)\}$

6) Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 4 : soient dans le plan complexe les points : A ; B ; C ; D ; E d'affixes respectivement :

$$z_A = 1+i \text{ et } z_B = 3+2i \text{ et } z_C = 2-i \text{ et } z_D = -2i$$

$$\text{et } z_E = 2$$

1) Représenter ces points dans le plan complexe

2) Déterminer l'affixe de I milieu de $[AB]$.

3) Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

4) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

Exercice 5 : Démontrer que $S = (1+i)^5 + (1-i)^5$ est un nombre réel.

Exercice 6 : on pose : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

et $S = j^{2n} - j^n \quad n \in \mathbb{Z}$

1) montrer que : $j^2 = \bar{j}$

2) Démontrer que : $S \in i\mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Exercice 7 : soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u \notin \mathbb{R}$

Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |1+uz| = |1+\bar{u} \cdot z| \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

Exercice 8 : $z \in \mathbb{C}$

Ecrire en fonction de $\bar{z}$ le conjugué des nombres complexes suivants :

$$1) Z_1 = (2+i)(5-i) \quad 2) Z_2 = 2z+5i \quad 3) Z_3 = \frac{z-1}{-3z+i}$$

Exercice 9 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$1) 2z + i\bar{z} = 5 - 4i$$

$$2) z = 2\bar{z} - 2 + 6i$$

Exercice 10 : dans le plan complexe on considère le nombre complexe U et soit M l'image du nombre complexe z et on pose : $U = (z-2i)(\bar{z}-1)$

Et $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

1) écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel

3) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que : U est imaginaire pur

Exercice11 :

A) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$1) 2z - 3\bar{z} + 1 + 2i = 0 \quad 2) z + (1-i)\bar{z} + 3 - 2i = 0$$

$$3) (3+i)z + \bar{z} = -i$$

B) Déterminer les ensembles suivants :

$$1) (E1) = \{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in \mathbb{R}\}$$

$$2) (E2) = \{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in i\mathbb{R}\}$$

Exercice12 : Démontrer que :

$$S = (\sqrt{3} + i)^{2n+1} - (i - \sqrt{3})^{2n+1} \text{ est un nombre réel } \forall n \in \mathbb{Z}$$

Exercice13 : dans le plan complexe on considère le nombre complexe U et soit M l'image du nombre complexe z et on pose : $U = 2iz - \bar{z}$

Et $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

1) écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel

Exercice 14 : calculer le module des nombres

$$\text{complexes suivants : } 1) z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 2) z' = 3 - 4i$$

Exercice15 :

A) Déterminer les modules des complexes suivants :

$$1) z_1 = 3 + \sqrt{3}i \quad 2) z_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{3}i \quad 3) z_3 = \frac{1}{1+i}$$

$$4) z_4 = x \text{ où } x \in \mathbb{R}$$

B) Ecrire sous la forme algébrique les complexes suivants puis déterminer leurs modules :

$$1) u_1 = \frac{2+5i}{1+3i} \quad 2) u_2 = \frac{1+i}{i-3\sqrt{2}} \quad 3) u_3 = (2-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+i)$$

C) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$

tels que : $A(z)$; $B(\bar{z})$ et $C(\frac{1}{z})$ soit alignés.

Exercice16 : calculer le module des nombres complexes suivants : 1) $z_1 = 5(1+i\sqrt{3})$

$$2) z_2 = (1+i)(\sqrt{3}-i) \quad 3) z_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3$$

Exercice17 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$; les points A, B et C

ont pour affixes: $z_A = 2$ et $z_B = 1 + \sqrt{3}i$ et $z_C = 3 + i\sqrt{3}$

Montrer que le triangle ABC est équilatéral

Exercice18 : Déterminer l'ensemble (Δ) des

points M d'affixe z tels que : $|z-1-2i| = |z-7+2i|$

Exercice19: Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : a) $|z-3+i| = 5$

$$b) |z-4-5i| = |z+2|$$

Exercice20 : Déterminer l'ensemble (C) des points

M d'affixe z tels que : $|z-2i| = 3$

Exercice21 : Déterminer l'ensemble (Δ) des

points M d'affixe z tels que : $|iz+3| = \left|\frac{1}{i}z - 4i + 1\right|$

Exercice22 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$;

on considère les points A ; B ; C ; D ; E ; F qui ont pour affixes: $z_A = 2$ et $z_B = -2i$ et $z_C = 2 + 2i$ et

$$z_D = 3i \text{ et } z_E = -3 \text{ et } z_F = -2 + 2i$$

1) Représenter les points A ; B ; C ; D ; E ; F dans Le plan complexe

2) on utilisant la représentations déterminer

l'argument des complexe : z_A et z_B et z_C et z_D et

$$z_E \text{ et } z_F$$

Exercice23 : Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants :

1) $z_1 = \sqrt{3} + i$ 2) $z_2 = 1 - i$ 3) $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$

4) $z_3 = -1 - \sqrt{3}i$ 5) $z = 7$ 6) $z = -12$

Exercice24: Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants avec

$\theta \in]-\pi; \pi[- \{0\}$

1) $z_1 = \sin \theta + i \cos \theta$ 2) $z_2 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta$

3) $z_3 = \sin \theta + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2}$

Exercice25 : on considère les nombres

complexes : $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = 1 - i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$ et

$U = z_1^6 \times z_2^2$

1) Ecrivez les nombres complexe z_1 ; z_2 et Z et

Sous leurs formes trigonométriques.

2) Ecrire le complexe Z Sous sa forme algébrique

puis en déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Exercice26 : Ecrire le complexe $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^8$

Sous sa forme algébrique

Exercice 27 : Déterminer le module et l'argument du nombre complexe z dans les cas suivants :

1) $z = \frac{3}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 2) $z = -5 - 5i$ 3) $z = -6 + 6\sqrt{3}i$

4) $z = (3 - 3i)^4$ 5) $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ 6) $z = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$

7) $z = (\sqrt{3} + 3i) \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ 8) $z = \frac{1}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$

9) $z = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$

Exercice28 : Déterminer les racines carrées de

$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Exercice29 : Soit le complexe :

$u = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$

1) Calculer u^2 puis déterminer la forme trigonométrique de u^2

2) En déduire la forme trigonométrique de u

Exercice30 : Soient A , B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $z_A = 3 + 5i$,

$z_B = 3 - 5i$ et $z_C = 7 + 3i$

1) montrer que : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$

2) montrer que ABC est un triangle rectangle et que : $BC = 2AC$

Exercice31 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$;

Soient A , B et C des points dans le plan complexe

d'affixes respectifs $a = 2i$, $b = \sqrt{2}(1 + i)$ et

$c = a + b$

1) Montrer que $OBCA$ est un losange

2) Montrer que : $\arg c \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$

Exercice32 : Soient A , B et C des points dans le

plan complexe d'affixes respectifs $a = 2 + i$,

$b = 3 + 2i$ et $c = 5 - i$

Soit α une mesure de l'angle orienté : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Calculer $\tan \alpha$

Exercice33 : On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ les points

A , B et C d'affixes respectifs : $z_1 = -\sqrt{2}$ et $z_2 = 1 + i$

et $z_3 = 1 - i$

1) Placer dans le repère $\mathcal{R}$ les points A , B et C

2) Déterminer le module et l'argument du nombre

complexe $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ et déterminer une mesure de

l'angle $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$

3) Montrer que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[BC]$ et en déduire que :

$$(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$$

4) Ecrivez le nombre $\frac{z_1 - z_2}{z_1}$ sous sa forme

algébrique puis en déduire $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$

Exercice34 : 1° Vérifier que les points $A(5+3i)$; $B(2+i)$ et $C(-1-i)$ sont alignés

2° Est ce que les points $M(-2+2i)$, $N(2-i)$ et $N(1-i)$ sont alignés ?

Exercice35 : Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

$$Z = \frac{5z - 2}{z - 1} \text{ Soit un imaginaire pur.}$$

Exercices36 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels

$$\text{que : } \left| \frac{z - 2}{z + 1 - i} \right| = 1$$

Exercice37 : soit a et b et c des nombres

complexes tels que : $|a| = |b| = |c| = 1$ et $a \neq c$ et $b \neq c$

$$1) \text{ Montrer que : } \left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{ en déduire que : } \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2} \arg\left(\frac{b}{a}\right) \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

$$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2} \arg\left(\frac{b}{a}\right) \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien



Bon courage