~ $2^{ème}$ *Sciences Expérimentales* ~

Série d'exercices : Limites et continuités

(12 exercices résolus)

Exercice 1 :

Montrer que la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x} \\ f(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ est continue en 0

Exercice 2 :

Montrer que la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x-3} & x \neq 3 \\ f(3) = 7 \end{cases}$ est continue en 3

Exercice 3 :

Montrer que la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x+1}{7-6x} & x \leq 2 \\ f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-2} & x > 2 \end{cases}$ est continue en 2

Exercice 4 :

Soit f la fonction la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1} & x \neq 1 \\ f(1) = m \end{cases}$ (m est un paramètre réel)

Déterminer la valeur du nombre réel m pour laquelle f est continue en 1

Exercices 5 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\dfrac{\pi \tan(x)}{3x}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2+7}\right)$; $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\dfrac{2x^2}{1-\cos x}}$

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + x - 1$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$
2) Montrer que $\alpha \in]0,1[$
3) Etudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 7 :

Montrer que l'équation $(E) : 1 + \sin x = x$ admet au moins une solution sur l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'il faut déterminer.
2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2x$

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'il faut déterminer.
2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

Exercice 10 :

Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}} \quad ; \quad B = \frac{1}{\sqrt[3]{3} + 1} \quad ; \quad C = \frac{\sqrt[3]{4}\sqrt{8}\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}} \quad ; \quad D = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}}$$

Exercice 11 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - x$
2) $\lim\limits_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1}$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+3} - 2x + 4$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$

6) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$

Exercice 12 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 12 = 0$