

Feuilles d'exercices : Convergence de suites

Exercice 1 (**)

Vrai ou faux ?

1. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
2. Une suite convergente est nécessairement monotone à partir d'un certain rang.
3. Une suite divergeant vers $+\infty$ est nécessairement croissante à partir d'un certain rang.
4. Si (u_n) est croissante, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n$, alors (v_n) est croissante.
5. Si $(|u_n|)$ converge, alors (u_n) aussi.
6. Si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) aussi.

Exercice 2 (* à **)

Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de chacune des suites suivantes :

- $u_n = 2^n - 3^n + 4^n$
- $u_n = (-n + 2)e^{-n}$
- $u_n = 2^n - e^{2n} + 1$
- $u_n = \frac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34}$
- $u_n = \ln n + e^{-3n}$
- $u_n = \frac{2\sqrt{n} + 3 \ln n - 5}{\ln(n^3) - 3n + 2}$
- $u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$
- $u_n = \frac{(n + 2)!}{(n^2 + 1) \times n!}$
- $u_n = e^{-\frac{1}{2n}} + \ln\left(\frac{n}{n + 2}\right)$

Exercice 3 (**)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. Montrer que tous les termes de la suite sont strictement positifs.
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n) .
3. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 \geq 2n + u_0^2$. En déduire la limite de la suite.

Exercice 4 (***)

On définit une suite (u_n) par $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} k!$ (je rappelle que par convention $0! = 1$). Montrer à l'aide d'un encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n!} = 1$.

Exercice 5 (***)

On considère une suite (u_n) définie par $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$, avec $a \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que la suite est croissante.
2. Montrer que, $\forall x \geq 0, \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

3. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{na}{n+a} \leq \ln u_n \leq a$.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
5. Quel résultat obtient-on en prenant $a = 1$?

Exercice 6 (*)

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leq 1$, puis prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Exercice 7 (**)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies de la façon suivante : $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$, et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes (les curieux seront contents d'apprendre que leur limite commune vaut $\frac{\pi^2}{6}$).

Exercice 8 (**)

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2 + k}$.

1. Montrer que $\frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$.
2. Déduire de l'encadrement précédent que la suite est convergente, et préciser sa limite.

Exercice 9 (***)

Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On définit deux suites de la façon suivante : $u_0 = a$; $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

1. Vérifier que ces deux suites sont bien définies.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ (pour une fois, pas besoin de récurrence).
3. Déterminer la monotonie de chacune des deux suites.
4. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
5. Écrire un programme Pascal permettant de calculer une valeur approchée de cette limite à ε près (ε étant choisi par l'utilisateur). On utilisera une boucle WHILE ou REPEAT.

Exercice 10 (***)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a \neq 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 1}$.

1. Montrer que la suite est bien définie.
2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.
3. Étudier également le signe de $f(x) - x$.
4. On suppose $a > 1$. À l'aide des questions précédentes, montrer que $\forall n \geq 1$, $u_n \geq 2(1 + \sqrt{2})$, puis que la suite est croissante. En déduire sa limite éventuelle.
5. Étudier de même la convergence de la suite quand $a < 1$.