EXERCICES avec correction:Arithmétique dans Z

1 Divisibilité, division euclidienne

Exercice 1

Sachant que l'on a $96842 = 256 \times 375 + 842$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 96842 par chacun des nombres 256 et 375.

Indication ▼ Correction ▼ [000251]

Exercice 2

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par } 24,$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \text{ est divisible par } 120.$$

Correction ▼ [000257]

Exercice 3

Montrer que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Correction ▼ [000267]

Exercice 4

Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Indication ▼ Correction ▼ [000254]

Exercice 5

Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000}.

Indication ▼ Correction ▼ [000250]

Exercice 6

1. Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.
2. Montrer de même que tout nombre pair vérifie $x^2 = 0 \pmod 8$ ou $x^2 = 4 \pmod 8$.
3. Soient a, b, c trois entiers impairs. Déterminer le reste modulo 8 de $a^2 + b^2 + c^2$ et celui de $2(ab + bc + ca)$.
4. En déduire que ces deux nombres ne sont pas des carrés puis que $ab + bc + ca$ non plus.

Indication ▼ Correction ▼ [000285]

2 pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide

Exercice 7

Calculer le pgcd des nombres suivants :

1. 126, 230.
2. 390, 720, 450.
3. 180, 606, 750.

Correction ▼ [000290]

Exercice 8

Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.

Correction ▼ [000292]

Exercice 9

Calculer par l'algorithme d'Euclide : $\text{pgcd}(18480, 9828)$. En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

Correction ▼ [000296]

Exercice 10

Notons $a = 1\,111\,111\,111$ et $b = 123\,456\,789$.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
2. Calculer $p = \text{pgcd}(a,b)$.
3. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = p$

.Correction ▼ [000303]

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $1665x + 1035y = 45$.

Indication ▼ Correction ▼ [000305]

3 Nombres premiers, nombres premiers entre eux

Exercice 12

Combien 15! admet-il de diviseurs ?

Indication ▼ Correction ▼ [000249]

Exercice 13

Démontrer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers $a+b$ et ab

.Indication ▼ Correction ▼ [000337]

Exercice 14

Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :

1. $(2^a - 1) | (2^{ab} - 1)$;
2. $2^p - 1$ premier $\Rightarrow$ p premier ;
3. $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\text{pgcd}(a,b)} - 1$.

Indication ▼ Correction ▼ [000336]

Exercice 15

Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^n + 1$ soit premier, montrer que $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2^k$. Que penser de la conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1$ est premier ?

Indication ▼ Correction ▼ [000349]

Exercice 16

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}, 0 < i < p$ on a :

$$C_p^i \text{ est divisible par } p.$$

2. Montrer par récurence que :

$$\forall p \text{ premier}, \forall a \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } a^p - a \text{ est divisible par } p.$$

Indication ▼ Correction ▼ [000339]

Exercice 17

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant 1$ on a :

$$2^{2^{n+k}} - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1).$$

2. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.
3. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Indication ▼ Correction ▼ [000341]

Exercice 18

Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k+1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$.
   Soit $a = 4p_1p_2 \ldots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Correction ▼ [000348]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Attention le reste d'une division euclidienne est plus petit que le quotient !

Indication pour l'exercice 4 ▲

Utiliser les modulos (ici modulo 8), un entier est divisible par 8 si et seulement si il est équivalent à 0 modulo 8. Ici vous pouvez commencer par calculer $7^n \pmod 8$.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Il faut travailler modulo 13, tout d'abord réduire 100 modulo 13. Se souvenir que si $a \equiv b \pmod{13}$ alors $a^k \equiv b^k \pmod{13}$. Enfin calculer ce que cela donne pour les exposants $k = 1, 2, 3, \ldots$ en essayant de trouver une règle générale.

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. Écrire $n = 2p+1$.
2. Écrire $n = 2p$ et discuter selon que p est pair ou impair.
3. Utiliser la première question.
4. Par l'absurde supposer que cela s'écrive comme un carré, par exemple $a^2+b^2+c^2 = n^2$ puis discuter selon que n est pair ou impair.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Commencer par simplifier l'équation ! Ensuite trouver une solution particulière (x_0, y_0) à l'aide de l'algorithme d'Euclide par exemple. Ensuite trouver un expression pour une solution générale.

Indication pour l'exercice 12 ▲

Il ne faut surtout pas chercher à calculer $15! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 15$, mais profiter du fait qu'il est déjà "presque" factorisé.

Indication pour l'exercice 13 ▲

Raisonner par l'absurde et utiliser le lemme de Gauss.

Indication pour l'exercice 14 ▲

Pour 1. utiliser l'égalité

$$x^b - 1 = (x-1)(x^{b-1} + \cdots + x + 1).$$

Pour 2. raisonner par contraposition et utiliser la question 1.
La question 3. est difficile ! Supposer $a \geqslant b$. Commencer par montrer que $\operatorname{pgcd}(2^a-1, 2^b-1) = \operatorname{pgcd}(2^a - 2^b, 2^b-1) = \operatorname{pgcd}(2^{a-b}-1, 2^b-1)$. Cela vour permettra de comparer l'agorithme d'Euclide pour le calcul de $\operatorname{pgcd}(a,b)$ avec l'algorithme d'Euclide pour le calcul de $\operatorname{pgcd}(2^a-1, 2^b-1)$.

Indication pour l'exercice 15 ▲

Raisonner par contraposition (ou par l'absurde) : supposer que n n'est pas de la forme 2^k, alors n admet un facteur irréductible $p > 2$. Utiliser aussi $x^p + 1 = (x+1)(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{p-1})$ avec x bien choisi.

Indication pour l'exercice 16 ▲

1. Écrire

$$C_p^i = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-(i+1))}{i!}$$

et utiliser le lemme de Gauss ou le lemme d'Euclide.

2. Raisonner avec les modulos, c'est-à-dire prouver $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Indication pour l'exercice 17 ▲

1. Il faut être très soigneux : n est fixé une fois pour toute, la récurrence se fait sur $k \geqslant 1$.
2. Utiliser la question précédente avec $m = n + k$.
3. Par l'absurde, supposer qu'il y a seulement N nombres premiers, considérer $N+1$ nombres du type F_i. Appliquer le "principe du tiroir" : *si vous avez $N+1$ chaussettes rangées dans N tiroirs alors il existe (au moins) un tiroir contenant (plus de) deux chaussettes.*
