

**TD : Exercices : Limite et continuité**  
**Exercices d'applications et de réflexions**

PROF: ATMANI NAJIB

2BAC BIOF: PC et SVT

**TD : Exercices: LIMITE ET CONTINUITE**

**Exercice1 :** Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}$       2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$   
 3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$       4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$   
 5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x}-x$       6)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

**Exercice2 :** (Limites à droite et à gauche)

Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de  $f$  en  $x_0 = -1$

**Exercice3 :** Soient les fonctions tels que :

$f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x)$  et  $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)}$  et  $h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$

- 1) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$
- 3) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$
- 4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de  $k$

**Exercice4 :** Considérons la fonction  $f$  définie

par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x-1}; si...x \neq 1 \\ f(1) = -4 \end{cases}$$

- 1) Déterminer  $Df$       2) a)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- b) Comparer  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  et  $f(1)$

**Exercice5 :** Considérons la fonction  $f$  définie par

$f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3}; si x \neq 3$  et  $f(3) = 7$

Etudier la est continuité de  $f$  en  $x_0 = 3$

**Exercice6 :** Considérons la fonction  $f$  définie

Par :  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}; si x \neq 0$  et  $f(0) = \frac{1}{2}$

Etudier la est continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

**Exercice7 :** Considérons la fonction  $f$  définie

Par :  $f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2-2x}; si x \neq 0$  et  $x \neq 2$  et  $f(2) = \frac{1}{2}$

Etudier la est continuité de  $f$  en  $x_0 = 2$

**Exercice8 :** Considérons la fonction  $f$  définie

Par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1}; si...x \neq 1 \\ f(1) = m \end{cases}$$

avec  $m$  paramètre réel

déterminer la valeur du réel  $m$  pour laquelle

$f$  est continue en  $x_0 = 1$

**Exercice9 :** Considérons la fonction  $f$  définie par

$f(x) = 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right); si x \neq 0$  et  $f(0) = 2$

Etudier la est continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

**Exercice10 :** Soit  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2; si...x \leq 0 \\ f(x) = 2 + x; si...x > 0 \end{cases}$$

Etudier la est continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

**Exercice11 :** Soit  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - x^2; si...x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x^2-3}{2x-1}; si...x > 0 \end{cases}$$

Etudier la est continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

**Exercice12 :** Considérons la fonction  $f$  définie

Par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x+1}{7-3x}; si...x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}; si...x > 2 \end{cases}$$

Etudier la est continuité de  $f$  en  $x_0 = 2$

**Exercice13 :** Soit la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{x^2-1}{|x-1|} \text{ si } x \neq 1 \text{ et } f(1) = 2$$

Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 1$

**Exercice14 :** Soit la fonction  $h$  définie par

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .

2- Déterminer la limite  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ,  $f$  est-elle continue en  $x_0 = -1$  ?

3- Soit la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

a) Déterminer  $D_f$

b) Etudier la continuité de la fonction

$f$  en  $x_0 = -1$  La fonction  $f$  s'appelle un prolongement par continuité de la fonction de  $f$  en  $-1$

4- Peut-on prolonger  $f$  par continuité en  $a = -2$

**Exercice15 :** Soit  $f$  une fonction définie par

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x} \text{ Donner un prolongement par}$$

continuité de la fonction  $f$  en  $x_0 = 0$

**Exercice 16 :** Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$1) h(x) = \sqrt{x^2+x+3} \quad 2) g(x) = \frac{x^4+x^3-6}{x^2+2x-3}$$

$$3) t(x) = \tan x$$

**Exercice 17 :** Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \cos(2x^2-3x+4)$$

$$2) g(x) = \sqrt{\frac{x}{1+\sin^2 x}} \quad 3) h(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

**Exercice 18 :** Déterminer les limites suivantes :

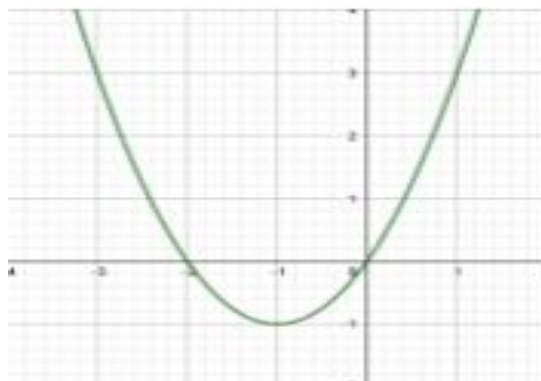
$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1-\cos x}{x^2} \pi\right) \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$$

**Exercice19 :** Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right) \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}\right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \sin \sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}}$$

**Exercice20 :** Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction  $f(x) = x^2 + 2x$



Déterminer graphiquement les images des intervalles :  $[-1, 2]$  ,  $[0, 2[$  ;  $]-1, 0]$

$$[2, +\infty[$$
 ;  $]-\infty, 1]$

**Exercice21 :** Soit  $f$  une fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

Déterminer les images des intervalles suivants :  $[0, 1]$  ;  $[-2, -1[$  ;  $]-1, 1]$  ;  $[2, +\infty[$

**Exercice22 :** Montrer que l'équation :

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0 \text{ admet une racine dans chacune}$$

des intervalles suivants :  $]-1; -\frac{1}{2}[$  ;  $]-\frac{1}{2}; 0[$  et  $]0; 1[$

**Exercice23 :** Montrer que l'équation :

$$x^3 + x + 1 = 0$$

Admet une racine unique dans  $]-1; 0[$

**Exercice24 :** Montrer que l'équation :  $\cos x = x$

Admet au moins une racine dans intervalle :

$$I = [0; \pi]$$

**Exercice25 :** Montrer que l'équation :  $1 + \sin x = x$

Admet au moins une racine dans intervalle :

$$I = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$$

**Exercice26 :** on considère la fonction :  $f$  tel que

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

1) Montrer que l'équation :  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$

2) Montrer que l'équation :  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]0; 1[$

3) étudier le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$

**Exercice27** : Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

1) Montrer que la fonction  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = ]-2; +\infty[$  admet une fonction

réciproque  $g^{-1}$  définie sur un  $J$  qu'il faut déterminer.

2) Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $J$

**Exercice 28**: Soit  $f$  la fonction définie sur

$$I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[ \text{ par : } f(x) = \sqrt{2x-1}$$

1) Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un  $J$  qu'il faut déterminer.

2) Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $J$

3) Représenter  $(C_f)$  et  $(C_{f^{-1}})$  dans le même

repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

**Exercice29** : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1)  $x^5 = 32$     2)  $x^7 = -128$     3)  $x^4 = 3$     4)  $x^6 = -8$

**Exercice30** : simplifier les expressions

suivantes : 1)  $(\sqrt[3]{2})^3$     2)  $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}$

3)  $A = \sqrt[5]{32} - (\sqrt[2]{2})^7 + \sqrt[3]{\sqrt[5]{512}} + \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

4)  $B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt{\sqrt[3]{4}} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$

5)  $C = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$     6)  $D = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 128000000}{27^2}}$

7)  $E = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$     8)  $F = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times (\sqrt{\sqrt{2}})^2}{\sqrt[3]{4}}$

**Exercice31** : comparer :  $\sqrt[5]{2}$  et  $\sqrt[2]{3}$

**Exercice 32** : résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

1)  $\sqrt[5]{3x-4} = 2$     2)  $(\sqrt[5]{x})^2 - 5\sqrt[5]{x} + 6 = 0$

**Exercice 33** : calcules les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3 + 24}$     2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5 + 2x^3 - x + 4}$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$     4)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$

5)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1}$     6)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$

7)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$

**Exercice34** : simplifier les expressions

suivantes : 1)  $A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{\sqrt{252}} \times \sqrt{18}}$

2) a) comparer :  $\sqrt[5]{4}$  et  $\sqrt[4]{3}$

b) comparer :  $\sqrt[3]{28}$  et  $\sqrt{13}$

c) comparer :  $\sqrt[5]{23}$  et  $\sqrt[15]{151}$

**Exercice35** : 1) Rendre le dénominateur rationnel

$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2}$      $b = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$      $c = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5}}$

$d = \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}$

2) Déterminer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$     b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - x$

**Exercice36** : Déterminer la limite suivante :

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{20x^2-4} - 2}{2x^2+x-3}$

**Exercice37**: 1) simplifier les expressions

suivantes :  $A = \frac{\sqrt[15]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[3]{9})^3}{\sqrt[5]{3}}$

et  $B = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt{\sqrt[3]{3^3} \times \sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt{\sqrt[3]{3}}}$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

a)  $\sqrt[3]{x-1} = 3$     b)  $x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$

c)  $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 12 = 0$

2) Déterminer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5 + x^2 + 1}$     b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$

**Exercice38** : Considérons la fonction  $f$  définie

par :  $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$  ; si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$

- 1) Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$
- 2) Etudier la continuité de  $f$  sur les intervalles  $]0; +\infty[$  et  $]-\infty; 0[$  et est-ce que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**Exercice 39 :** soient  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  tels que  $f$  est bornée et  $g$  continue sur  $\mathbb{R}$ ; Montrer que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 40:** Considérons la fonction  $f$  continue sur l'intervalle  $[a; b]$  et  $x_1$  et  $x_2$  et  $x_3$  des nombres de l'intervalle  $[a; b]$

Montrer que l'équation :

$3f(x) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$  admet au moins une solution dans  $[a; b]$

**Exercice 41 :** soient  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[a; b]$  tels que :

$$0 < g(x) < f(x) \quad \forall x \in [a; b]$$

Montrer que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; (1 + \lambda)g(x) \leq f(x)$$

**Exercice 42:** Considérons la fonction  $f$  continue sur l'intervalle  $[a; b]$  tel que :  $f(a) < 0$

il existe  $x_0 \in ]a; b[$  tel que :  $f(x_0) = \frac{a - x_0}{b - x_0}$

**Exercice 43 :** Soit la fonction  $f(x) = x^2 + x + 1$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

- 1- Déterminer  $J = f([0, 1])$
- 2- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque de  $J$  vers  $[0, 1]$  et déterminer  $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

**Exercice 44 :** Soit la fonction  $g(x) = x - 2\sqrt{x}$  définie sur  $\mathbb{R}^+$ .

- 1- Montrer que  $g$  est strictement croissante sur  $[1, +\infty[$  puis déterminer  $J = g([1, +\infty[)$
- 2- Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque de  $J$  vers  $[1, +\infty[$  et déterminer  $g^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

**Exercice 45 :** Soit la fonction  $h(x) = \frac{x}{1 - x^2}$

Montrer que  $h$  est une bijection de  $] - 1, 1[$  vers un intervalle  $J$  qu'il faut déterminer et déterminer et déterminer  $h^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

### Exercice 46 :

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation:  $\sqrt[3]{x} - x = 0$
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt{x} + 6 = 0$
3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$

### Exercice 47:

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $x^4 = 16$
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $(x-1)^3 = -27$

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien*

